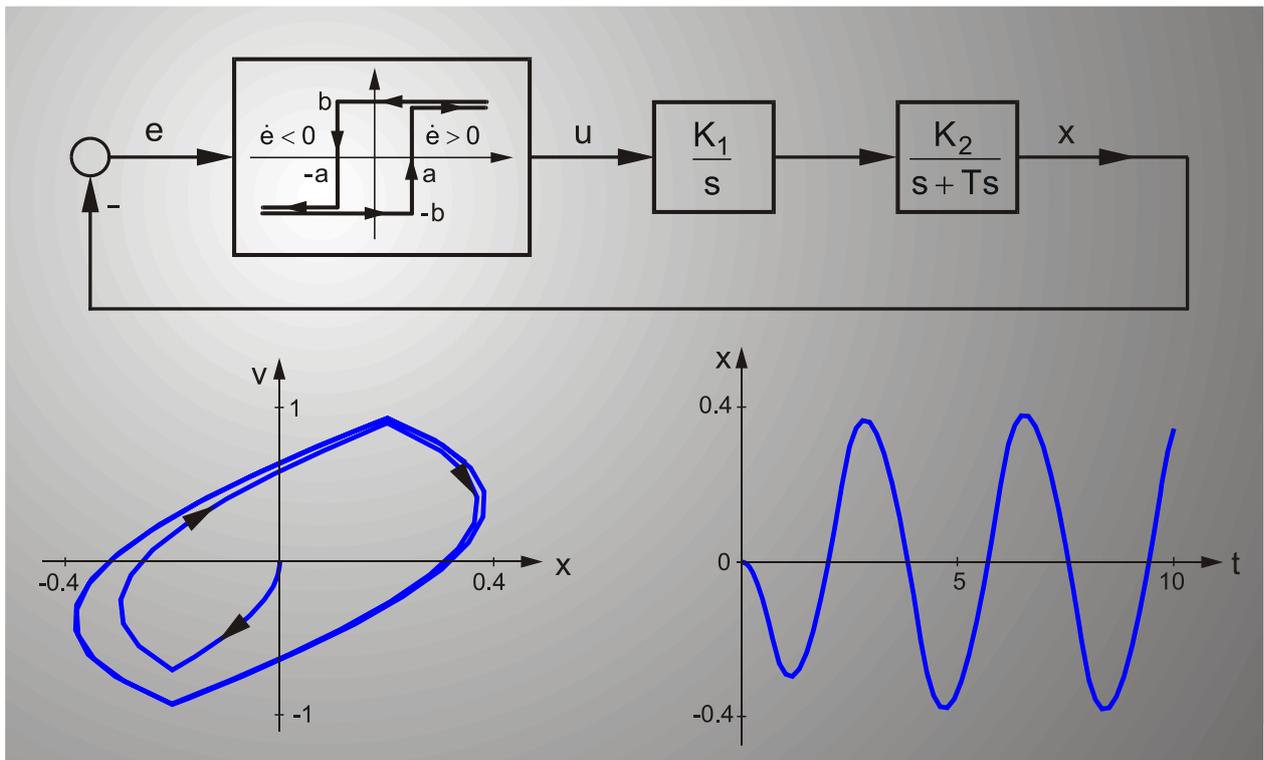


Beiblätter zur Vorlesung

Nichtlineare Regelungssysteme

Dr.-Ing. Mathias Kluwe



Sommersemester 2016

[http:// www.irs.kit.edu](http://www.irs.kit.edu)

1 Grundlagen

- 1.1 Nichtlineare Systeme: Definition, Beschreibung und typische Strukturen
- 1.2 Stabilitätsbegriff bei nichtlinearen Systemen

2 Analyse und Synthese nichtlinearer Systeme in der Zustandsebene

- 2.1 Prinzipielle Vorgehensweise
- 2.2 Trajektorien des nichtlinearen Standard-Regelkreises in der Phasenebene und Stabilität der Ruhelage
- 2.3 Strukturumschaltung
- 2.4 Auftreten von Grenzzyklen und Zusammenhang mit der Stabilität der Ruhelage
- 2.5 Totzeitsysteme in der Phasenebene
- 2.6 Behandlung von Systemen höherer Ordnung in der Phasenebene

3 Analyse nichtlinearer Systeme auf Lyapunov-Stabilität

- 3.1 Grundgedanke der Direkten Methode
- 3.2 Stabilitätskriterien (nach Lyapunov)
- 3.3 Ergänzende Kriterien zur Stabilität und Instabilität
- 3.4 Prinzipielle Vorgehensweise zur Stabilitätsanalyse
- 3.5 Anwendung der Direkten Methode auf lineare Systeme und Methode der ersten Näherung (Indirekte Methode)

4 Synthese nichtlinearer Systeme im Zustandsraum

- 4.1 Synthese nichtlinearer Eingrößensysteme
 - 4.1.1 Der Begriff der Differenzordnung
 - 4.1.2 Lokale Zustandstransformationen
 - 4.1.3 Ein-/Ausganglinearisierung
 - 4.1.4 Die Nulldynamik
 - 4.1.3 Exakte Zustandslinearisierung

4.2 Synthese nichtlinearer Mehrgrößensysteme

4.2.1 Die Differenzordnung im Mehrgrößenfall

4.2.2 Lokale Zustandstransformationen

4.2.3 Reglersynthese: Ein-/Ausganglinearisierung mit Entkopplung

5 Harmonische Balance (Harmonische Linearisierung)

5.1 Die Beschreibungsfunktion und die Gleichung der Harmonischen Balance

5.2 Beispiele für Beschreibungsfunktionen und nichtlineare Ortskurven

5.3 Ermittlung von Dauerschwingungen mit der Harmonischen Balance

5.4 Stabilitätsverhalten von Dauerschwingungen und Stabilität der Ruhelage

6 Das Popov-Kriterium

6.1 Absolute Stabilität und Voraussetzungen des Popov-Kriteriums

6.2 Formulierung und Anwendung des Popov-Kriteriums

6.3 Erweiterungen und Grenzen des Verfahrens

- 1) Föllinger, O. Nichtlineare Regelungen.
Band I: Grundbegriffe, Anwendungen der Zustandsebene,
Direkte Methode.
8. Auflage, 1998.
Band II: Harmonische Balance, Popow- und Kreiskriterium,
Hyperstabilität, Synthese im Zustandsraum.
7. Auflage, 1993.
R. Oldenbourg Verlag.
- 2) Khalil, H. K. Nonlinear Systems.
Third edition.
Prentice-Hall, 2001.
- 3) Unbehauen, R. Systemtheorie 2.
Mehrdimensionale, adaptive und nichtlineare Systeme.
7. Auflage, 1998.
R. Oldenbourg Verlag.
- 4) Sepulchre, R. Constructive Nonlinear Control.
Springer-Verlag, 1997.
- 5) Adamy, J. Nichtlineare Regelungen.
Springer-Verlag, 2009.
- 6) Isidori, A. Nonlinear Control Systems.
Third Edition.
Springer-Verlag, 1995.
- 7) Nijmeijer, H.,
van der Schaft, A.J. Nonlinear Dynamical Control Systems.
Springer-Verlag, 1990.
- 8) Marino, R.,
Tomei, P. Nonlinear Control Design.
Prentice Hall, 1995.
- 9) Qu, Z. Robust control of nonlinear uncertain systems.
John Wiley & Sons, 1998.
- 10) Sastry, S. Nonlinear Systems: Analysis, Stability and Control.
Springer-Verlag, 1999.

Definition eines allgemeinen Übertragungsgliedes:

Ein Übertragungsglied ist eine Anordnung, welche aus einer Eingangsgröße $u(t)$ oder auch mehreren Eingangsgrößen $u_1(t), \dots, u_p(t)$ eine eindeutig bestimmte Ausgangsgröße $y(t)$ erzeugt.



$$y(t) = \varphi \{u(t)\}$$

φ ist ein Operator, der auf die Eingangsgröße $u(t)$ angewendet wird.

Beispiel: $y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau$.

Die Ausgangsgröße $y(t)$ wird durch Integration der Eingangsgröße $u(t)$ erhalten. Der Operator besteht in der Ausführung der Integration.

Definition eines linearen Übertragungsgliedes:

Ein Übertragungsglied ist **linear**, wenn es das Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip erfüllt:

$$\varphi\{u + \tilde{u}\} = \varphi\{u\} + \varphi\{\tilde{u}\} \quad , \quad (\text{Überlagerungsprinzip})$$

$$\varphi\{cu\} = c \cdot \varphi\{u\} \quad . \quad (\text{Verstärkungsprinzip})$$

Man kann beide Beziehungen zu einer Beziehung zusammenfassen, die häufig ebenfalls als Überlagerungs- oder Superpositionsprinzip bezeichnet wird:

$$\varphi\{c u(t) + \tilde{c} \tilde{u}(t)\} = c \varphi\{u(t)\} + \tilde{c} \varphi\{\tilde{u}(t)\} \quad . \quad (*)$$

Dabei sind $u(t)$ und $\tilde{u}(t)$ beliebige Zeitfunktionen und c und \tilde{c} beliebige Konstanten.

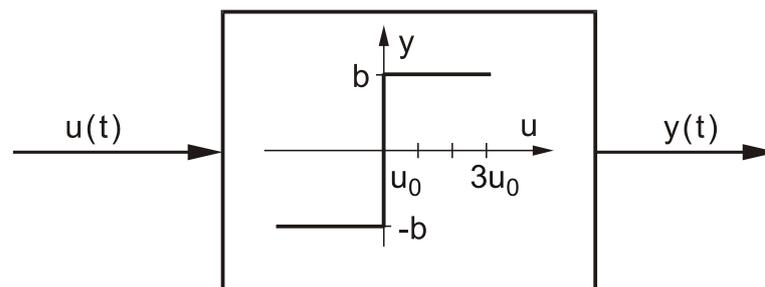
Beispiel: Für das Integrierglied gilt

$$\begin{aligned}\varphi\{c u(t) + \tilde{c} \tilde{u}(t)\} &= \int_0^t [c u(\tau) + \tilde{c} \tilde{u}(\tau)] d\tau = \\ &= c \int_0^t u(\tau) d\tau + \tilde{c} \int_0^t \tilde{u}(\tau) d\tau = c\varphi\{u(t)\} + \tilde{c}\varphi\{\tilde{u}(t)\} .\end{aligned}$$

Definition eines nichtlinearen Übertragungsgliedes:

Ein Übertragungsglied $y = \varphi\{u\}$ ist **nichtlinear**, wenn der Operator φ die Linearitätsbedingung (*) nicht erfüllt. Das heißt also: Wenn es ein Paar von Zeitfunktionen $u(t)$, $\tilde{u}(t)$ und Konstanten c , \tilde{c} gibt, so dass (*) nicht gilt.

Beispiel: Zweipunktglied

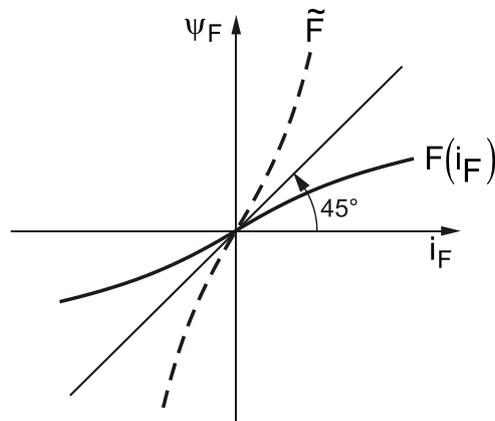
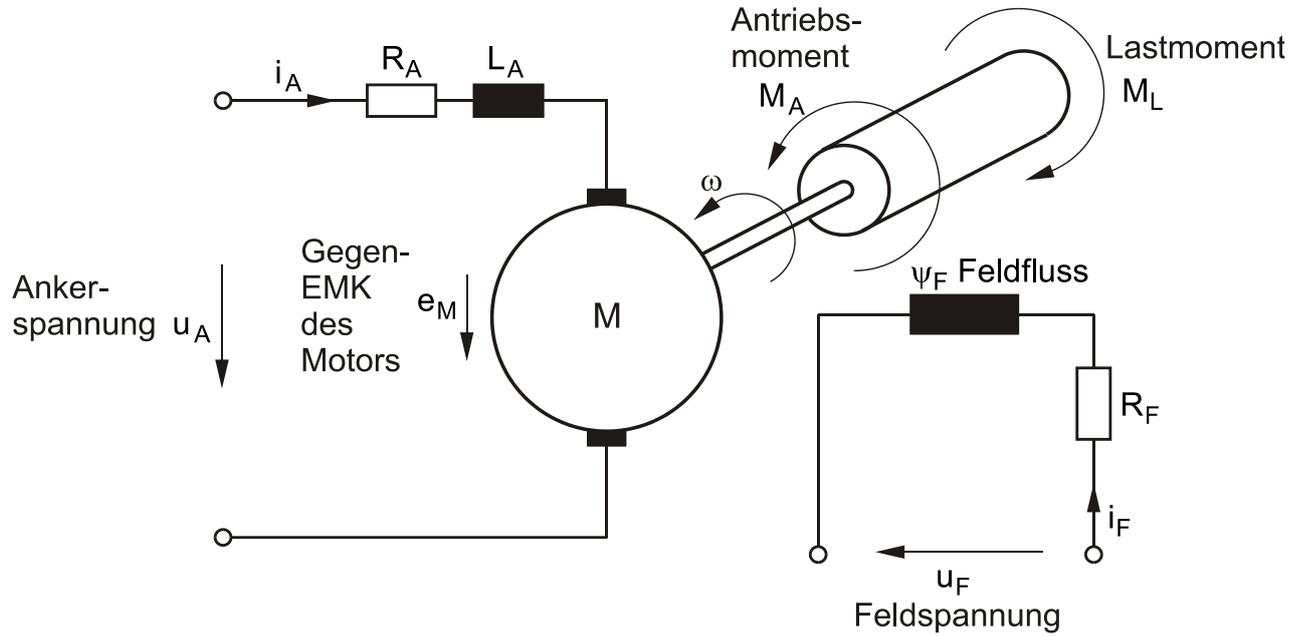


Schaltet man nacheinander die zwei konstanten Zeitfunktionen $u(t) = u_0$ und $u(t) = 3u_0$ am Eingang auf, so erhält man jeweils die gleiche Ausgangsgröße

$$\varphi\{u_0\} = b \quad , \quad \varphi\{3u_0\} = b \quad .$$

Das Verstärkungsprinzip ist also verletzt. Daher ist das Zweipunktglied nichtlinear.

Definition: Unter einem **nichtlinearen System** versteht man eine Verknüpfung von Übertragungsgliedern, die mindestens ein nichtlineares Übertragungsglied enthält.



Feldkreis:

$$u_F = R_F i_F + \dot{\psi}_F$$

$$\psi_F = F(i_F) \quad \nearrow \quad i_F = \tilde{F}(\psi_F)$$

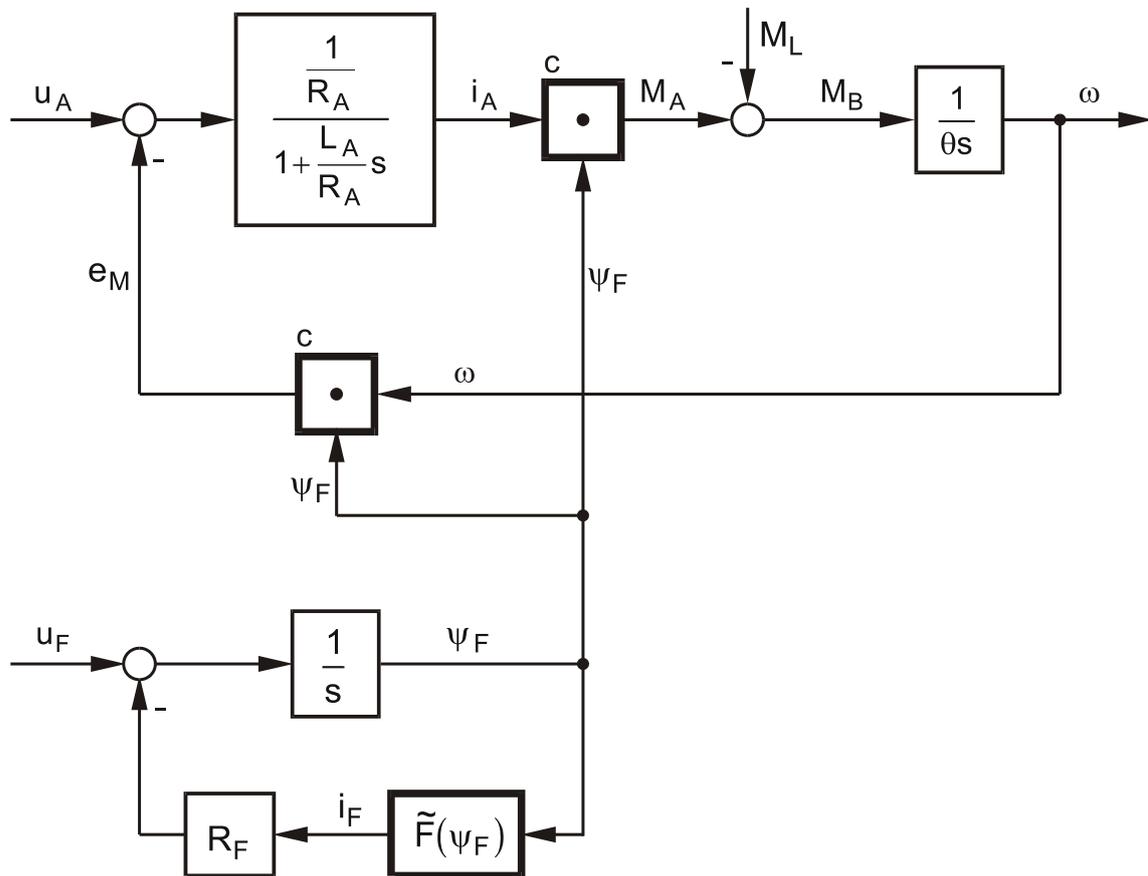
Ankerkreis:

$$u_A - e_M = R_A i_A + L_A \dot{i}_A, \quad e_M = c \psi_F \omega$$

Mechanische Bewegung:

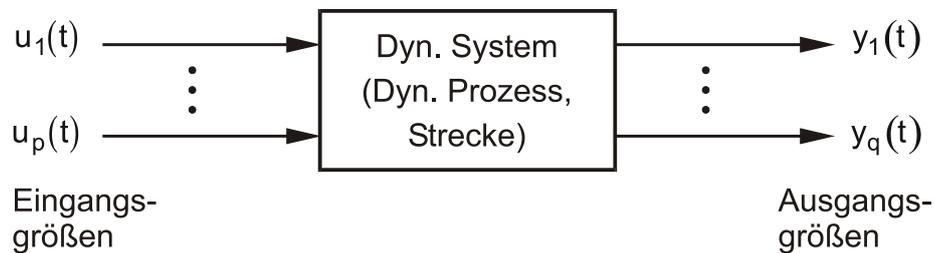
$$\theta \dot{\omega} = M_B = M_A - M_L, \quad M_A = c \psi_F i_A$$

Strukturbild des Motors:



1.1 Zur Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme NLR 1-5

Dynamisches System:



Bildet man das mathematische Modell eines dynamischen Systems, so kann man es in vielen Fällen auf die folgende Form bringen:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{System von } n \text{ Differentialgleichungen} \\ \text{1. Ordnung} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} y_1 = g_1(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t) \\ \vdots \\ y_q = g_q(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_p; t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{System von } q \text{ gewöhnlichen} \\ \text{Gleichungen} \end{array}$$

Dabei sind $x_1(t), \dots, x_n(t)$ Zwischengrößen, welche die Verbindung zwischen den Ein- und Ausgangsgrößen herstellen. Sie seien so gewählt, dass folgendes gilt:

Ist t_0 ein beliebiger Zeitpunkt und sind die Eingangsgrößen $u_1(t), \dots, u_p(t)$ für $t > t_0$ gegeben, so sind die Zwischengrößen $x_1(t), \dots, x_n(t)$ und mit ihnen die Ausgangsgrößen $y_1(t), \dots, y_q(t)$ für alle $t > t_0$ eindeutig bestimmt, sofern die Anfangswerte $x_1(t_0), \dots, x_n(t_0)$ gegeben sind. Die Zwischengrößen x_1, \dots, x_n werden dann als **Zustandsvariablen** des dynamischen Systems bezeichnet. Die Wertegesamtheit $x_1(t), \dots, x_n(t)$ zu irgendeinem Zeitpunkt t ist der **Zustand** des Systems zu diesem Zeitpunkt.

1.1 Zur Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme NLR 1-6

Vektorschreibweise:

$$\text{Eingangsvektor} \quad \underline{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix},$$

$$\text{Ausgangsvektor} \quad \underline{y}(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix},$$

$$\text{Zustandsvektor} \quad \underline{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}.$$

$$\text{Außerdem} \quad \underline{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}, \quad \underline{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_q \end{bmatrix}.$$

Dann gelten die Vektorgleichungen:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\underline{x}}(t) &= \underline{f}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t): \text{Zustandsdifferentialgleichung} \\ \underline{y}(t) &= \underline{g}(\underline{x}(t), \underline{u}(t), t): \text{Ausgangsgleichung} \end{aligned} \right\} \text{Zustandsgleichungen}$$

Hierin ist

$$\dot{\underline{x}}(t) = \frac{d}{dt} \underline{x}(t) = \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{bmatrix}.$$

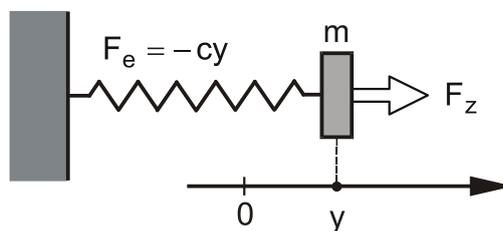
Liegt in den Zustandsgleichungen keine explizite Abhängigkeit von der Zeit t vor, so spricht man von einem **autonomen** System.

1.1 Zur Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme NLR 1-7

Geometrische Deutung:

Man fasst die Zustandsvariablen x_1, \dots, x_n als Koordinaten eines n -dimensionalen Euklidischen Raumes auf. $\underline{x}(t)$ ist Ortsvektor in diesem Raum und stellt den Zustandspunkt des dynamischen Systems dar. Für variables t beschreibt er eine Kurve im Zustandsraum, die **Trajektorie** (oder Zustandskurve) des Systems. Ist $\underline{u}(t)$ gegeben, so geht - von Ausnahmefällen abgesehen - durch jeden Anfangspunkt \underline{x}_0 genau eine Trajektorie.

Beispiel (für $n = 2$): Ungedämpfter mechanischer Schwinger



Eingangsgröße: $u = F_z$ (konstant)

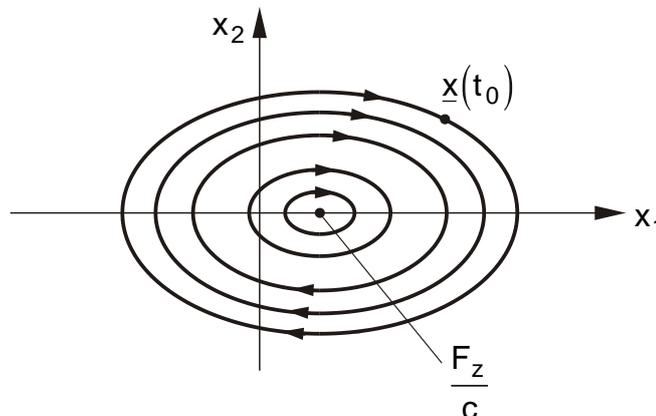
Ausgangsgröße: y

Zustandsvariablen: $x_1 = y$, $x_2 = \dot{y}$

Zustandsdifferentialgleichungen:
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{c}{m} x_1 + \frac{1}{m} u \end{cases}$$

Ausgangsgleichung: $y = x_1$.

Trajektorien:



1.1 Zur Zustandsbeschreibung dynamischer Systeme NLR 1-8

Spezialfall: Lineares System

$$\dot{\underline{x}} = \underset{(n,1)}{\underline{A}} \underset{(n,n)}{\underline{x}} + \underset{(n,p)}{\underline{B}} \underset{(p,1)}{\underline{u}} \quad , \quad \text{Zustandsdifferentialgleichung,}$$

$$\underset{(q,1)}{\underline{y}} = \underset{(q,n)}{\underline{C}} \underset{(n,1)}{\underline{x}} + \underset{(q,p)}{\underline{D}} \underset{(p,1)}{\underline{u}} \quad , \quad \text{Ausgangsgleichung.}$$

Dabei ist

n die Systemordnung,

p die Anzahl der Eingangsgrößen,

q die Anzahl der Ausgangsgrößen,

\underline{A} heißt Dynamikmatrix (oder Systemmatrix),

\underline{B} Eingangsmatrix ($p \leq n$, fast immer $< n$),

\underline{C} Ausgangsmatrix (häufig $q = p$),

\underline{D} Durchgangsmatrix (bei realen Systemen meist = $\underline{0}$).

} Matrizen konstant :
System zeitinvariant

Eingrößensystem: $p = 1, q = 1$

$$\dot{\underline{x}} = \underset{(n,n)}{\underline{A}} \underline{x} + \underset{(n,1)}{\underline{b}} u, \quad y = \underset{(1,n)}{\underline{c}^T} \underline{x} + \underset{(1,1)}{d} u \quad .$$

Ein dynamisches System sei durch seine Zustandsgleichungen gegeben:

$$\begin{aligned}\dot{x}_i &= f_i(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p), \quad i = 1, \dots, n, \\ y_k &= g_k(x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_p), \quad k = 1, \dots, q.\end{aligned}$$

Definition: Das System befindet sich genau dann im Ruhezustand, wenn die Ableitungen der Zustandsgrößen Null sind:

$$\dot{x}_i \equiv 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Dies ist aber nur möglich, wenn die Eingangsgrößen u_ν , $\nu = 1, \dots, p$, konstant sind:

$$u_1 \equiv u_{1R}, \quad u_2 \equiv u_{2R}, \dots, \quad u_p \equiv u_{pR}.$$

Somit gilt im Ruhezustand

$$0 = f_i(x_1, \dots, x_n, u_{1R}, \dots, u_{pR}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Aus diesen Gleichungen können die Ruhewerte x_{1R}, \dots, x_{nR} berechnet werden. Sie bestimmen die **Ruhelage, (Ruhezustand, Beharrungszustand, Gleichgewichtszustand, stationärer Zustand)** \underline{x}_R des Systems. Es ist durchaus möglich, dass das Gleichungssystem keine, mehrere oder unendlich viele Lösungen hat. Es gibt dann für die gegebenen Werte der Eingangsgrößen keine, mehrere oder unendlich viele Ruhelagen.

Zu jeder Ruhelage gehören feste Werte der Ausgangsgrößen:

$$y_{kR} = g_k(x_{1R}, \dots, x_{nR}, u_{1R}, \dots, u_{pR}), \quad k = 1, \dots, q.$$

Spezialfall: Ruhelage eines nichtlinearen Regelkreises

Nichtlineare Regelung:

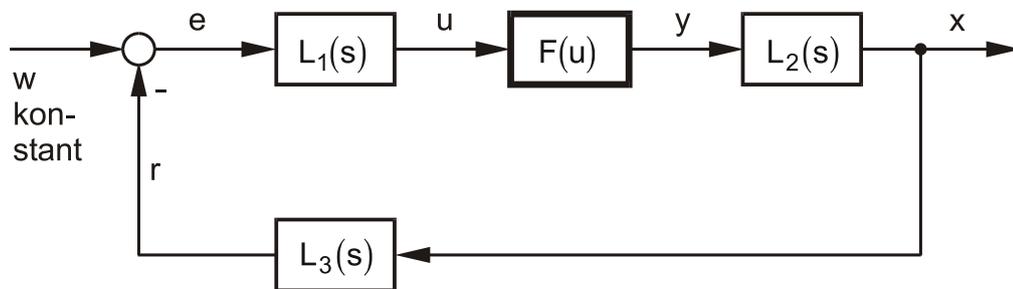


Bild 1

Damit eine Ruhelage möglich ist, muss w konstant sein: $w = w_R$.

Für jedes der linearen Teilsysteme L_i , $i = 1, 2, 3$, gilt eine Differentialgleichung vom Typ

$$a_{ni}^{(n)} x_a + \dots + a_{1i} \dot{x}_a + a_{0i} x_a = b_{0i} x_e + b_{1i} \dot{x}_e + \dots + b_{mi}^{(m)} x_e \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad ,$$

wobei $x_e(t)$ seine Eingangsgröße, $x_a(t)$ seine Ausgangsgröße ist. Im Ruhezustand müssen alle zeitlichen Ableitungen Null sein. Daher gilt, wenn der Index R den Ruhezustand kennzeichnet:

$$a_{0i} x_{aR} = b_{0i} x_{eR} \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad . \quad (1)$$

Dabei darf man bei einem Regelkreisglied $b_{0i} \neq 0$ annehmen, da andernfalls im Ruhezustand die Eingangsgröße x_e nicht durchgeschaltet würde. Enthält das Übertragungsglied ein I-Glied, so muss $x_{eR} = 0$ und damit $a_{0i} = 0$ sein. Andernfalls ist $a_{0i} \neq 0$.

Aus Bild 1 folgt gemäß (1):

$$\left. \begin{aligned} a_{01}u_R &= b_{01}e_R, \\ e_R &= w_R - r_R, \\ a_{03}r_R &= b_{03}x_R, \\ a_{02}x_R &= b_{02}y_R. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Aus (2) erhält man für die Ausgangsgröße y

$$y = \frac{a_{02}}{b_{02}} \cdot \frac{a_{03}}{b_{03}} \cdot \left(w_R - \frac{a_{01}}{b_{01}} u \right),$$

also

$$y = \alpha - \beta u \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{a_{03}a_{02}}{b_{03}b_{02}} w_R, \quad \beta = \frac{a_{01}a_{03}a_{02}}{b_{01}b_{03}b_{02}}. \quad (3)$$

Zu dieser linearen Beziehung tritt die Gleichung der nichtlinearen Kennlinie hinzu:

$$y = F(u). \quad (4)$$

Aus den beiden Gleichungen (3), (4) kann man die Ruhewerte u_R und y_R gemäß Bild 2 graphisch bestimmen.

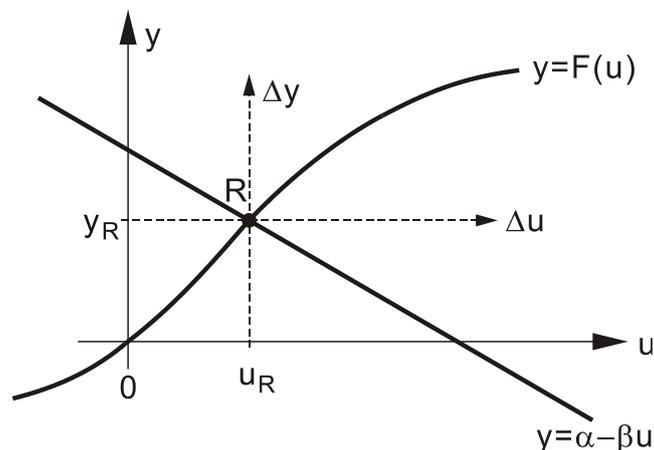


Bild 2

Die restlichen Ruhewerte erhält man aus (2).

Übergang zu den Abweichungen von der Ruhelage:

$$\Delta u = u - u_R, \quad \Delta y = y - y_R, \quad \dots$$

Das bedeutet: Die Ruhelage $R = (u_R, y_R)$ wird Ursprung des neuen Koordinatensystems (siehe Bild 2). Falls der Regelkreis mehrere Ruhelagen hat, was möglich sein kann, ist nur eine dieser Ruhelagen gemeint.

Beim Übergang zu den Abweichungen bleiben die linearen Übertragungsglieder unverändert. Aus dem Soll-Istwert-Vergleich

$$e = w - r$$

wird:

$$e_R + \Delta e = w_R - (r_R + \Delta r),$$

also wegen $e_R = w_R - r_R$:

$$\Delta e = -\Delta r.$$

Aus der Gleichung der Kennlinie wird:

$$y_R + \Delta y = F(u_R + \Delta u) \quad \swarrow \searrow$$

$$\Delta y = F(u_R + \Delta u) - y_R = \hat{F}(\Delta u).$$

Dies ist die gleiche Kennlinie wie früher, nur in den neuen Koordinaten. Aus dem Regelkreis im Bild 1 wird so der Regelkreis im Bild 3a. Daraus ergibt sich durch Verlegung der linearen Blöcke entgegen der Wirkungsrichtung und Zusammenfassung zu einem Block Bild 3b. Durch Umbezeichnung, statt \hat{F} wieder F usw., ergibt sich daraus der **nichtlineare Standardregelkreis** im Bild 3c.

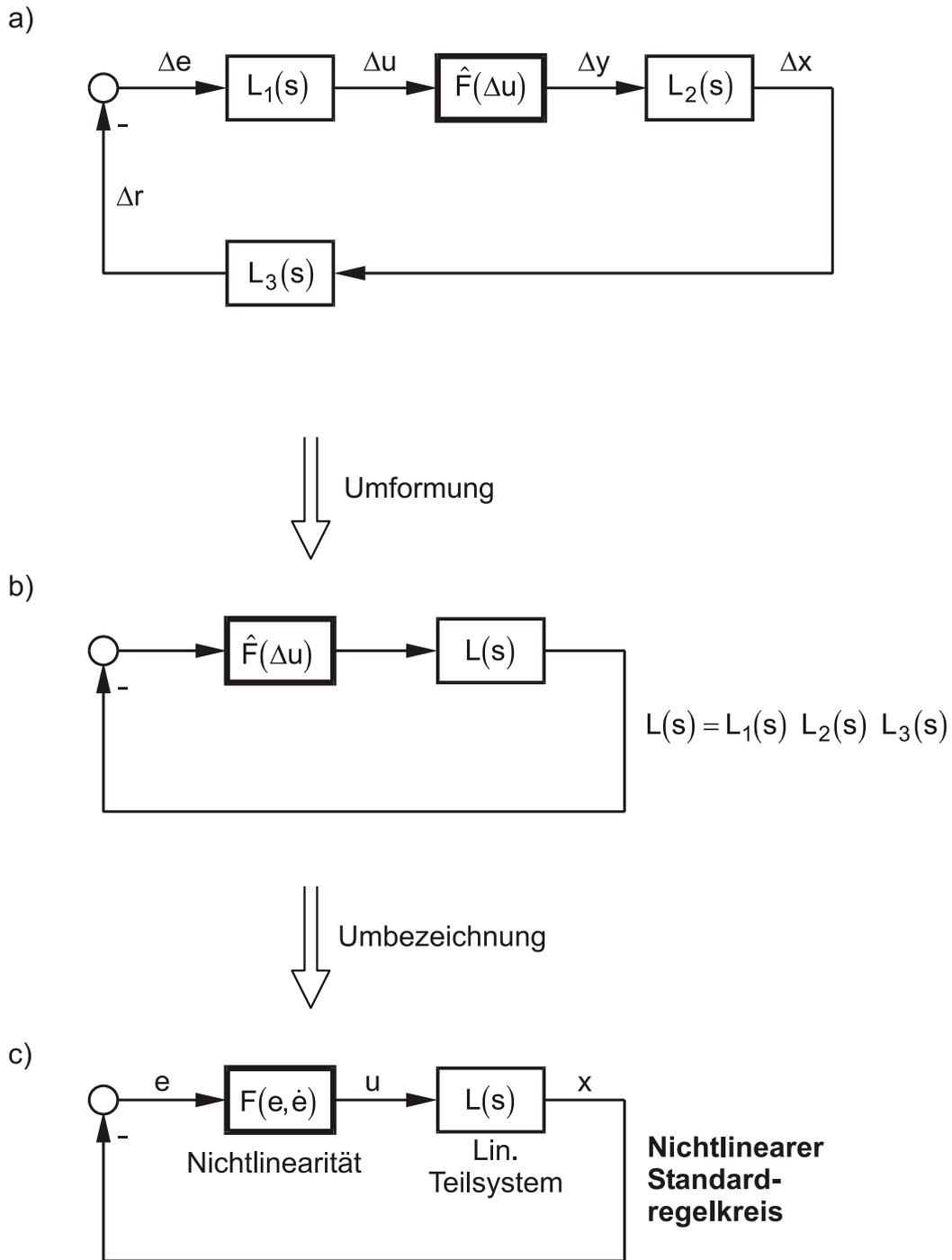


Bild 3

Die früheren Größen x, e, u sind von den neuen Größen x, e, u verschieden, können aber durch lineare Rechnung aus ihnen erhalten werden. Ihr Verlauf im Einzelnen ist aber im allgemeinen uninteressant. Entscheidend ist vielmehr das Stabilitätsverhalten des Regelkreises. An ihm wurde durch die äquivalente Umformung des ursprünglichen Regelkreises in die nichtlineare Standardregelung nichts geändert.

Spezialfall:

Ist $w_R = 0$ (wenn zum Beispiel das Verhalten des Regelkreises bezüglich Anfangsstörungen betrachtet wird) oder enthält das hinter der Nichtlinearität gelegene Übertragungsglied ein I-Glied, was häufig der Fall ist ($a_{02} = 0$), so ist $\alpha = 0$. Die lineare Kennlinie $y = \alpha - \beta u$ geht dann durch den Ursprung. Gilt das gleiche auch für die nichtlineare Kennlinie, so ist $u_R = 0, y_R = 0$: Die Ruhelage liegt im Ursprung.

Durch den Übergang zu den Abweichungen von der Ruhelage wird dann die Gleichung der Kennlinie nicht verändert ($\hat{F} = F$), und es wird lediglich w_R als Bezugspunkt für die Größen x und e genommen.

Gegeben sei ein dynamisches System $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x}, \underline{u})$ mit konstantem \underline{u} . Es existiere eine eindeutige Lösung $\underline{x}(t)$ bei gegebenem $\underline{x}(t_0) = \underline{x}_0$.

Eine Ruhelage \underline{x}_R des Systems heißt

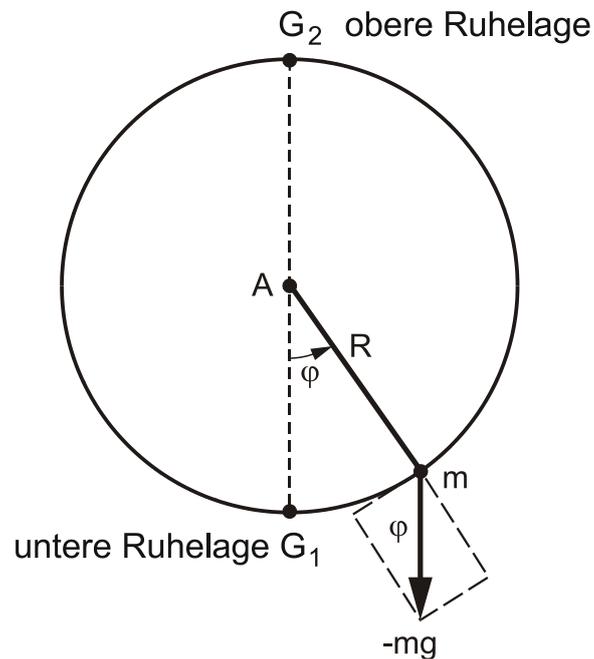
- **stabil**, wenn $\underline{x}(t)$ für alle Zeiten $t > t_0$ in einer beliebig engen Umgebung von \underline{x}_R bleibt, sofern \underline{x}_0 genügend nahe bei \underline{x}_R liegt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \|\underline{x}_0 - \underline{x}_R\| < \delta \Rightarrow \|\underline{x}(t) - \underline{x}_R\| < \varepsilon ,$$

- **instabil**, wenn \underline{x}_R nicht stabil ist,
- **asymptotisch stabil**, wenn \underline{x}_R stabil ist und außerdem eine Umgebung (= **Einzugsbereich**) besitzt, aus der $\underline{x}(t)$ für $t \rightarrow \infty$ gegen \underline{x}_R strebt:

$$\exists \delta > 0 \text{ mit } \|\underline{x}_0 - \underline{x}_R\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \underline{x}(t) = \underline{x}_R ,$$

- **global asymptotisch stabil**, wenn \underline{x}_R asymptotisch stabil ist und der Einzugsbereich den gesamten Zustandsraum umfasst.

**Untere Ruhelage:**

- Stabil, aber nicht asymptotisch stabil beim ungedämpften Pendel,
- Asymptotisch stabil, aber nicht global asymptotisch stabil beim gedämpften Pendel.

Obere Ruhelage:

Instabil.

2.1 Analyse der Ruhelagen des starren Pendels in der Zustandsebene

NLR 2-1

$$m\ddot{s} = -mg \sin \varphi \quad \text{mit} \quad s = R\varphi \quad \curvearrowright \quad \ddot{\varphi} = -\frac{g}{R} \sin \varphi$$

Zustandsvariablen: $x_1 = \varphi$, $x_2 = \dot{\varphi}$

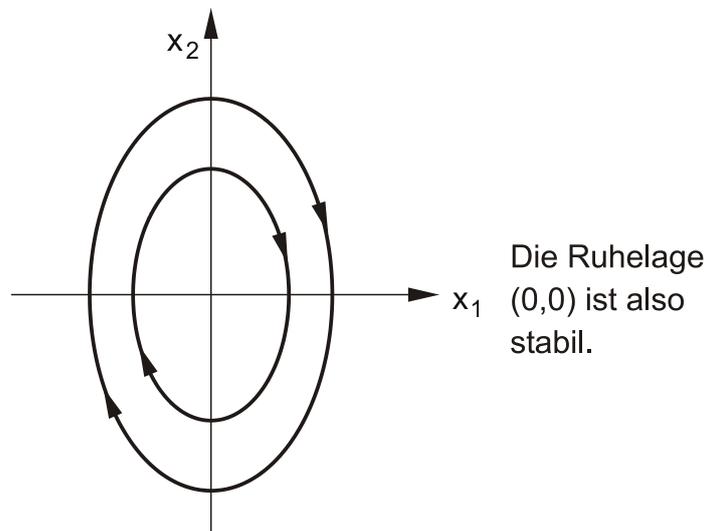
Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{g}{R} \sin x_1 \end{array} \right\} \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g}{R} \frac{\sin x_1}{x_2}$$

In der Umgebung von $(0, 0)$ (untere Ruhelage):

$$|x_1|, |x_2| \text{ klein} \quad \curvearrowright \quad \sin x_1 \approx x_1 \quad \curvearrowright \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{g}{R} \frac{x_1}{x_2} \quad \curvearrowright$$

$$x_2 dx_2 = -\frac{g}{R} x_1 dx_1 \quad \curvearrowright \quad \frac{g}{R} x_1^2 + x_2^2 = \text{const} : \text{Ellipsen um } (0, 0) .$$



2.1 Analyse der Ruhelagen des starren Pendels in der Zustandsebene

NLR 2-2

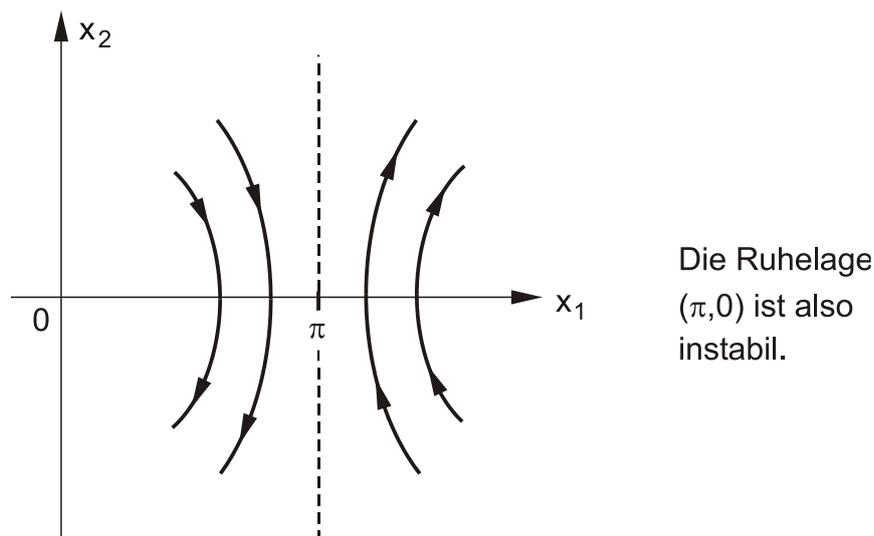
In der Umgebung von $(\pi, 0)$ (obere Ruhelage):

$$\text{Wegen } \sin x_1 = \sin(x_1 - \pi + \pi) = \sin(x_1 - \pi) \cdot \underbrace{\cos \pi}_{-1} + \cos(x_1 - \pi) \cdot \underbrace{\sin \pi}_0$$

$$= -\sin(x_1 - \pi) \approx -(x_1 - \pi):$$

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{g}{R} \frac{x_1 - \pi}{x_2} \quad \swarrow \searrow \quad x_2 dx_2 - \frac{g}{R} (x_1 - \pi) dx_1 = 0 \quad \swarrow \searrow$$

$$\frac{g}{R} (x_1 - \pi)^2 - x_2^2 = \text{const}: \text{ Hyperbeln um } (\pi, 0).$$



Die angegebene Durchlaufungsrichtung folgt aus $\dot{x}_1 = x_2$: Für $x_2 > 0$ wächst x_1 , für $x_2 < 0$ nimmt x_1 ab.

Betrachtet wird im Folgenden die allgemeine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} + a_0 x = c \quad (*)$$

1. Spezialfall: $a_0 = 0$

Aus der Differentialgleichung (*) wird dann

$$\ddot{x} + a_1 \dot{x} = c$$

Die Zustandsdifferentialgleichungen lauten also

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \\ \dot{v} &= c - a_1 v. \end{aligned}$$

Jetzt seien zwei Fälle unterschieden:

$\alpha) c = 0$

Die Trajektorien ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx} &= -a_1, \\ v &= -a_1 x + v_0 : \text{Geraden (s. Bild 1)} \end{aligned}$$

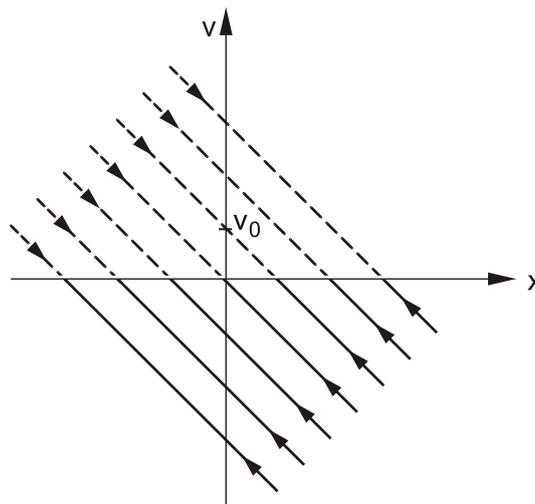


Bild 1

Dabei handelt es sich also um zwei Trajektorienscharen, die auf der x -Achse enden.

$\beta) c \neq 0$

Jetzt berechnen sich die Trajektorien aus

$$\frac{dv}{dx} = \frac{c - a_1 v}{v} .$$

Trennung der Veränderlichen führt zu

$$\begin{aligned} dx &= \frac{v}{c - a_1 v} dv \\ &= -\frac{1}{a_1} \cdot \frac{v}{v - \frac{c}{a_1}} dv \\ &= -\frac{1}{a_1} \cdot \frac{\left(v - \frac{c}{a_1}\right) + \frac{c}{a_1}}{v - \frac{c}{a_1}} dv \\ &= -\frac{1}{a_1} dv - \frac{c}{a_1^2} \frac{dv}{v - \frac{c}{a_1}} . \end{aligned}$$

Somit ergeben sich die Kurven in der Phasenebene zu

$$x = -\frac{1}{a_1} v - \frac{c}{a_1^2} \ln \left| v - \frac{c}{a_1} \right| + K ,$$

wodurch also bei Variation der Integrationskonstanten K parallel verschobene Kurven in Richtung der x -Achse entstehen.

Je nach Wahl der Vorzeichen von $\frac{c}{a_1}$ liegen dann die im Bild 2 skizzierten

Trajektorien für $-\frac{c}{a_1} \leq v \leq \frac{c}{a_1}$ vor.

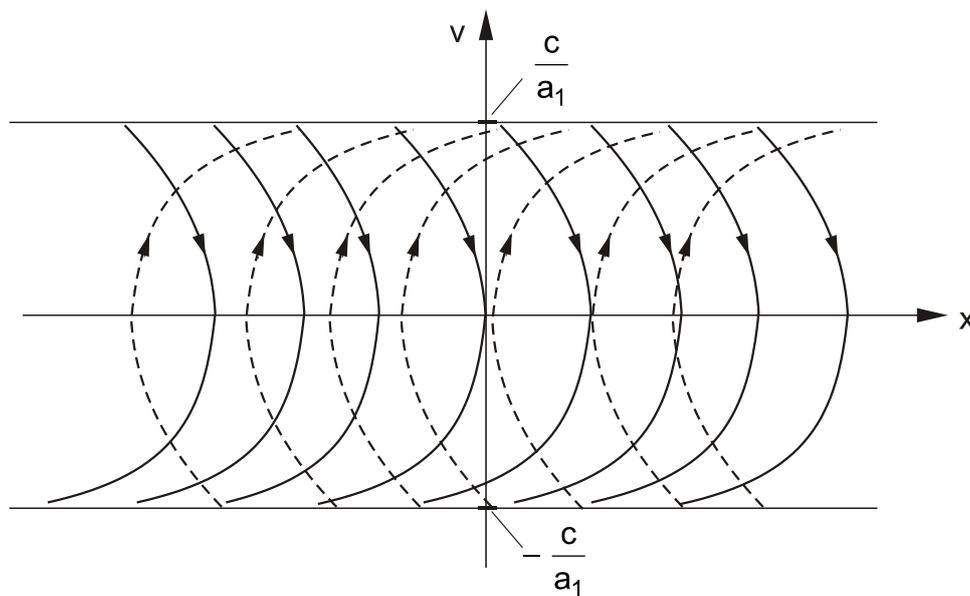


Bild 2

$$\text{---} : x = -\frac{1}{a_1}v + \frac{c}{a_1^2} \ln \left| v + \frac{c}{a_1} \right| + K$$

$$\text{-----} : x = -\frac{1}{a_1}v - \frac{c}{a_1^2} \ln \left| v - \frac{c}{a_1} \right| + K$$

2. Spezialfall: $a_1 = 0$

Die Differentialgleichung (*) reduziert sich zu

$$\ddot{x} + a_0x = c \quad ,$$

was zu den Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x} = v \quad ,$$

$$\dot{v} = c - a_0x$$

führt.

2.1 Trajektorien in der Phasenebene für einige lineare Systeme 2. Ordnung

Die Trajektorien in der Phasenebene folgen aus

$$\frac{dv}{dx} = \frac{c - a_0 x}{v}$$

nach partieller Integration zu

$$v^2 = 2cx - a_0 x^2 + K \quad .$$

Jetzt lassen sich zwei verschiedene Fälle von Trajektorienverläufen angeben, für die allesamt die Ruhelage $(x_R, v_R) = \left(\frac{c}{a_0}, 0\right)$ einen sogenannten

Wirbelpunkt (siehe auch 3. Spezialfall) darstellt:

- a) $a_0 = 1$: **Kreise** um $(c, 0)$ (Bild 3 a)),
- b) $a_0 \neq 1$: **Ellipsen** um $\left(\frac{c}{a_0}, 0\right)$ (Bild 3 b)).

Wie man an den Trajektorien im Bild 3 erkennt, ist die *Ruhelage stabil, aber nicht asymptotisch stabil.*

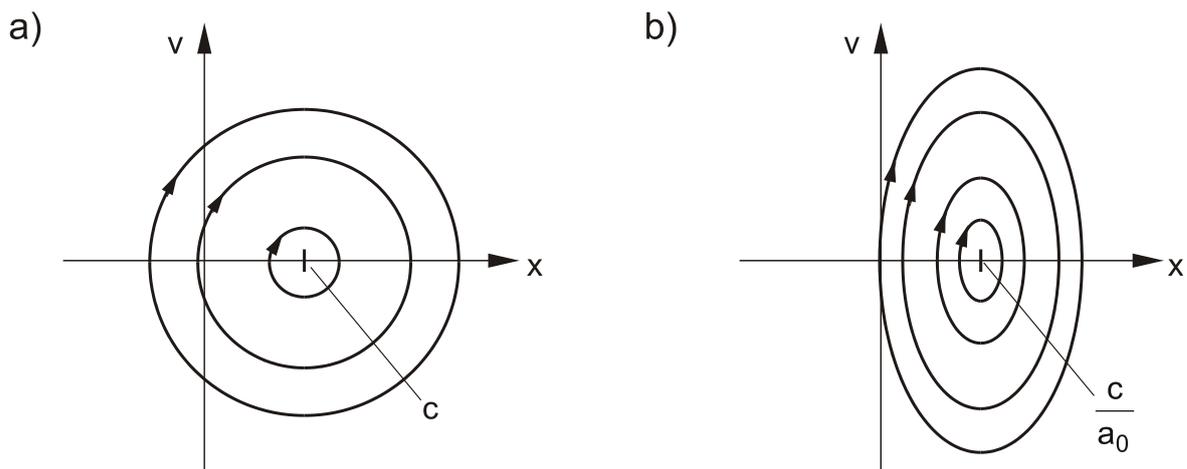


Bild 3

3. Spezialfall: $a_0 \neq 0, c = 0$

Die Differentialgleichung (*) lässt sich dann als inhomogene Differentialgleichung

$$\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = u \quad (**)$$

mit verschwindender Eingangsgröße ($u = 0$) interpretieren.

Um zu einer Zustandsdarstellung zu gelangen, wird (**) in den Laplace-Bereich transformiert, was mittels Partialbruchzerlegung zu der Darstellung

$$X(s) = \left[\frac{r_1}{s - \lambda_1} + \frac{r_2}{s - \lambda_2} \right] U(s) \quad (1)$$

mit λ_1, λ_2 als Wurzeln der charakteristischen Gleichung

$$s^2 + a_1s + a_0 = 0$$

führt.

Durch Definitionen neuer Zustandsvariablen x_1 und x_2 gemäß

$$X_i(s) = \frac{1}{s - \lambda_i} U(s) \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

ergeben sich die neuen Zustandsdifferentialgleichungen zu

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i + u \quad i = 1, 2$$

bzw. (da $u = 0$ betrachtet wird)

$$\dot{x}_i = \lambda_i x_i \quad i = 1, 2 \quad (3)$$

Aus (1) und (2) folgt sofort der Zusammenhang zwischen x_1, x_2 und x, v :

$$x = r_1 x_1 + r_2 x_2 \quad (4)$$

bzw. wegen (3):

$$v = \dot{x} = r_1 \dot{x}_1 + r_2 \dot{x}_2 = r_1 \lambda_1 x_1 + r_2 \lambda_2 x_2 \quad (5)$$

Durch die Koordinatentransformation (4), (5) bilden die x_1 - und x_2 -Achsen in der (x, v) -Ebene ein schiefwinkliges Achsenkreuz. Der gemeinsame Ursprung ist offenbar die Ruhelage der Differentialgleichung, deren Stabilitätsverhalten anhand der im Folgenden diskutierten Trajektorien in der Phasenebene beurteilt werden kann.

Aus den entkoppelten Differentialgleichungen (3) folgen die Lösungen

$$x_i(t) = x_{i0} e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, 2, \quad (6)$$

die als Parameterdarstellungen (Parameter t) zweckmäßigerweise zur Ermittlung der Trajektorienverläufe dienen. Aus (6) wird deutlich, dass hierbei die Lage der Eigenwerte λ_1, λ_2 maßgeblichen Einfluss hat:

$\alpha)$ λ_1, λ_2 **reell mit $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$**

In diesem Fall ergibt sich aus der Berechnung der Trajektorien die Ruhelage $(0, 0)$ als **Knotenpunkt**, wobei sie entweder

- 1) *instabil* ($\lambda_1, \lambda_2 > 0$) oder
- 2) *global asymptotisch stabil* ($\lambda_1, \lambda_2 < 0$)

ist. Bild 4 zeigt Fall 2).

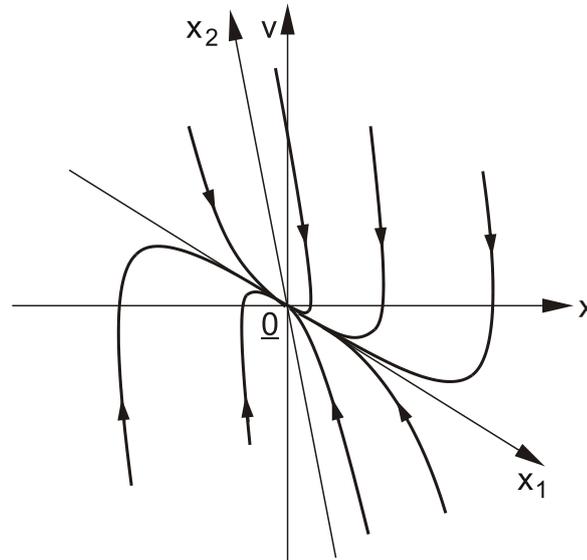


Bild 4

$\beta)$ λ_1, λ_2 reell mit $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$

Da der Betrag einer der beiden Zustandsvariablen mit $t \rightarrow \infty$ zunimmt, der andere gegen 0 strebt, erhält man die somit *instabile* Ruhelage als **Sattelpunkt** der Trajektorien (Bild 5)

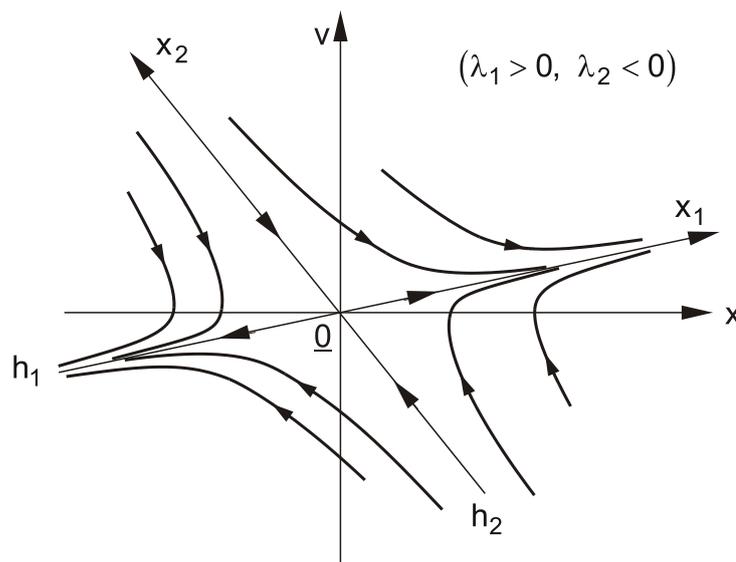


Bild 5

Die Asymptoten h_1, h_2 sind also die x_1 - bzw. x_2 -Achse.

$\gamma)$ λ_1, λ_2 **konjugiert komplex** ($\lambda_{1,2} = \delta_0 \pm j\omega_0$)

Es wird $\delta_0 \neq 0$ angenommen, da sonst eine Differentialgleichung gemäß Spezialfall 2 vorliegt. Um die nunmehr mit nichtreellen Koeffizienten behafteten Differentialgleichungen (3) anschaulich deuten zu können, geht man mit einer zusätzlichen Koordinatentransformation zu den Real- und Imaginärteilen von x_1 und x_2 über:

$$x_1 = p + jq, \quad x_2 = p - jq \quad (7)$$

bzw.

$$p = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \quad q = \frac{1}{2j}(x_1 - x_2) \quad .$$

p und q sind dann die neuen Zustandsvariablen ((p, q) -Achsen schiefwinklig zu (x, v) -Koordinatensystem mit gleichem Ursprung), deren Zustandsdifferentialgleichungen sich durch Einsetzen von (7) in (3) zu

$$\begin{aligned} \dot{p} &= \delta_0 p - \omega_0 q, \\ \dot{q} &= \omega_0 p + \delta_0 q \end{aligned}$$

ergeben, aus der man eine Differentialgleichung

$$\frac{dq}{dp} = \frac{\omega_0 p + \delta_0 q}{\delta_0 p - \omega_0 q}$$

erhält.

Führt man Polarkoordinaten

$$p = r \cos \varphi$$

$$q = r \sin \varphi$$

ein, ergibt sich nach Trennung der Veränderlichen und partieller Integration die Lösung

$$r = r_0 e^{\frac{\delta_0}{\omega_0} \varphi} \quad . \quad (8)$$

Aus (8) erhält man als Trajektorien logarithmische Spiralen, die Ruhelage ist ein **Strudelpunkt**. Sie ist *instabil* ($\delta > 0$) oder wie im Bild 6 skizziert *global asymptotisch stabil* ($\delta < 0$).

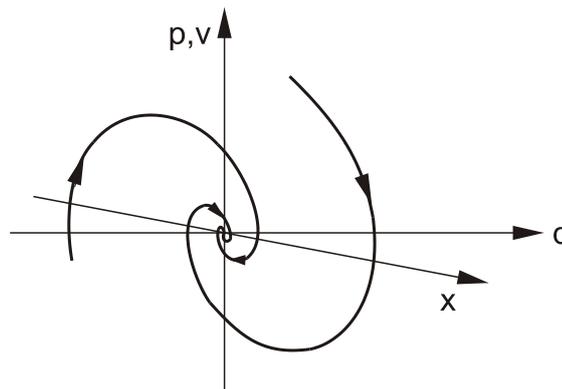


Bild 6

Liegen keine verschiedenen Eigenwerte, sondern zwei *gleiche Eigenwerte* $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ von (**) vor, so gilt statt (1) die Partialbruchzerlegung

$$X(s) = \left[\frac{r_1}{s - \lambda} + \frac{r_2}{(s - \lambda)^2} \right] U(s) \quad .$$

Einführung von Zustandsvariablen

$$X_1(s) = \frac{1}{s - \lambda} U(s) \quad ,$$
$$X_2(s) = \frac{1}{s - \lambda} X_1(s)$$

führt auf die nun nicht mehr entkoppelten Zustandsdifferentialgleichungen

$$\dot{x}_1 = \lambda x_1 \quad ,$$
$$\dot{x}_2 = \lambda x_2 + x_1 \quad .$$

Wie man aus den Lösungen

$$x_1(t) = x_{10} e^{\lambda t} \quad ,$$
$$x_2(t) = (x_{20} + x_{10} t) e^{\lambda t}$$

ablesen kann, liegt die Ruhelage $(0, 0)$ wiederum als **Knotenpunkt** (vgl. α) vor (*global asymptotisch stabil* für $\lambda < 0$, *instabil* für $\lambda > 0$).

A Stückweise lineare Kennlinien

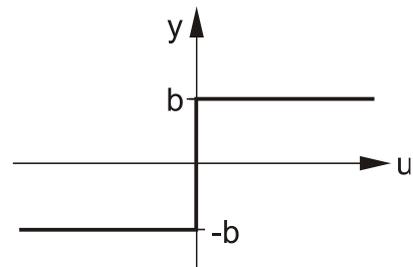
1. Relaiskennlinien (= Kennlinien mit achsenparallelen Geradenstücken)

a) Zweipunktkennlinie

- ohne Hysterese

$$y = \begin{cases} -b, & u < 0 \\ 0, & u = 0 \\ b, & u > 0 \end{cases}$$

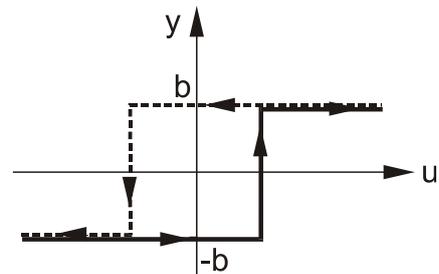
$$= b \operatorname{sgn} u$$



- mit Hysterese

$$y = \begin{cases} b \operatorname{sgn}(u + a), & \dot{u} < 0 \\ b \operatorname{sgn}(u - a), & \dot{u} > 0 \end{cases}$$

$$= b \operatorname{sgn}(u - a \operatorname{sgn} \dot{u})$$

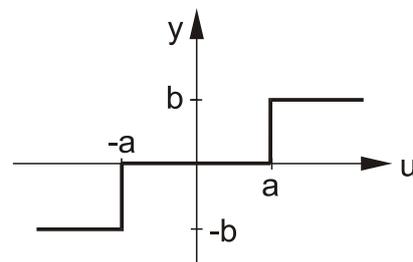


b) Dreipunktkennlinie

- ohne Hysterese

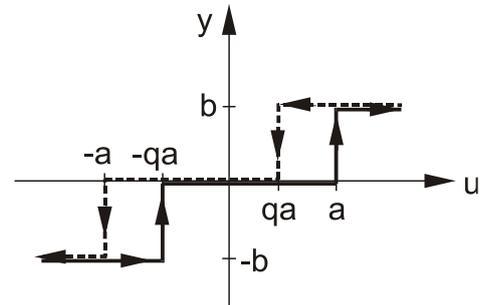
$$y = \begin{cases} -b, & u < -a \\ 0, & -a < u < a \\ b, & u > a \end{cases}$$

$$= \frac{b}{2} [\operatorname{sgn}(u - a) + \operatorname{sgn}(u + a)]$$



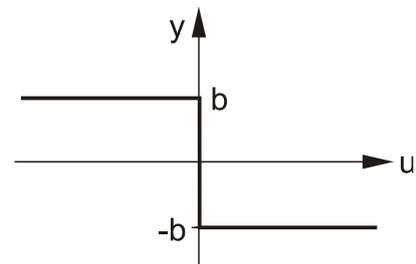
- mit Hysterese

$$y = \begin{cases} -b, & \begin{cases} \dot{u} > 0 \wedge u < -qa \\ \dot{u} < 0 \wedge u < -a \end{cases} \\ b, & \begin{cases} \dot{u} > 0 \wedge u > a \\ \dot{u} < 0 \wedge u > qa \end{cases} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$



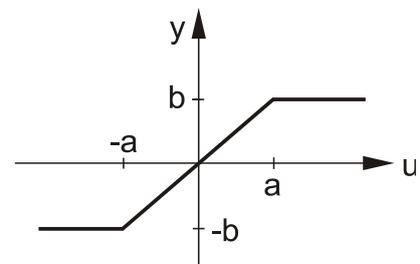
c) Trockene Reibung

$$y = \begin{cases} b, & u < 0 \\ 0, & u = 0 \\ -b, & u > 0 \end{cases}$$



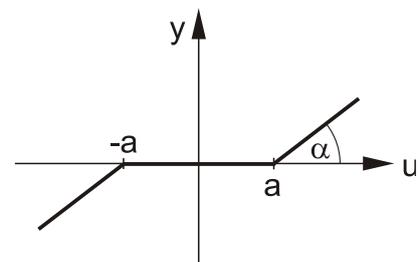
2. Begrenzungs- (Sättigungs-) Kennlinie

$$y = \begin{cases} -b, & u \leq -a \\ \frac{b}{a}u, & -a \leq u \leq a \\ b, & u \geq a \end{cases}$$



3. Totzone

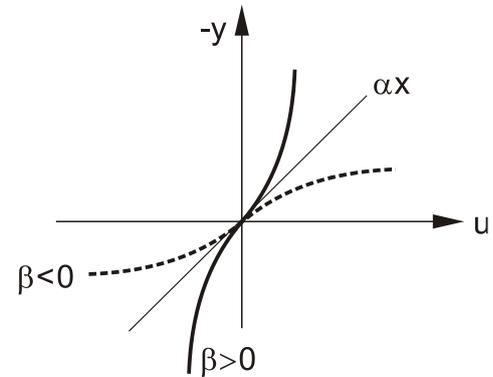
$$y = \begin{cases} m(u+a), & u \leq -a \\ 0, & -a \leq u \leq a \\ m(u-a), & u \geq a \end{cases}, m = \tan \alpha$$



B Gekrümmte Kennlinien

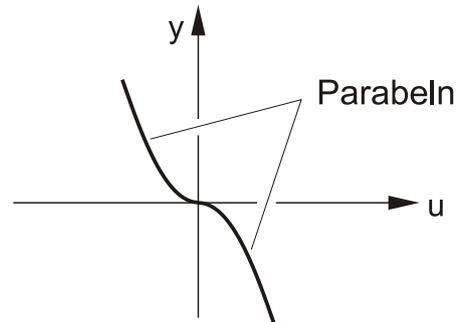
1. Federrückstellkraft

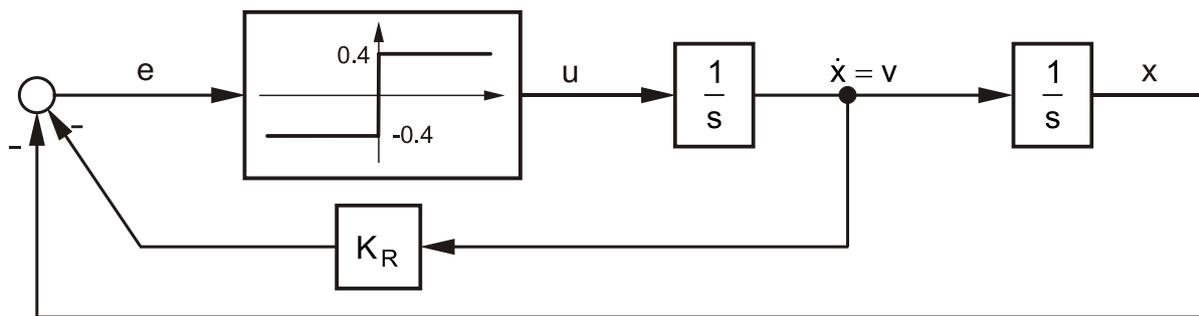
$$y = -(\alpha x + \beta x^3), \quad \alpha > 0, \quad \beta \text{ beliebig}$$



2. Strömungswiderstand

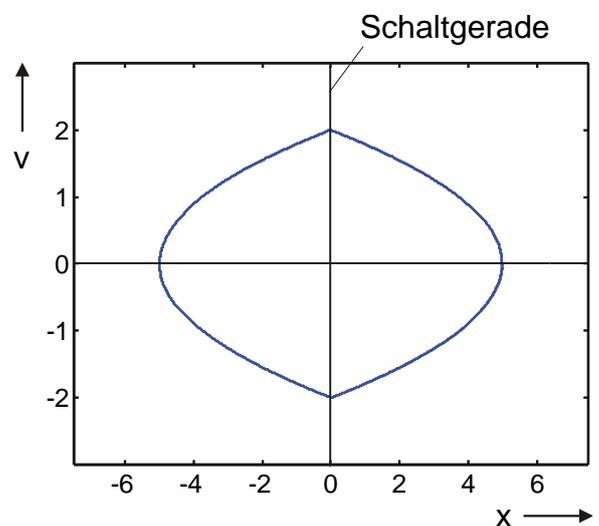
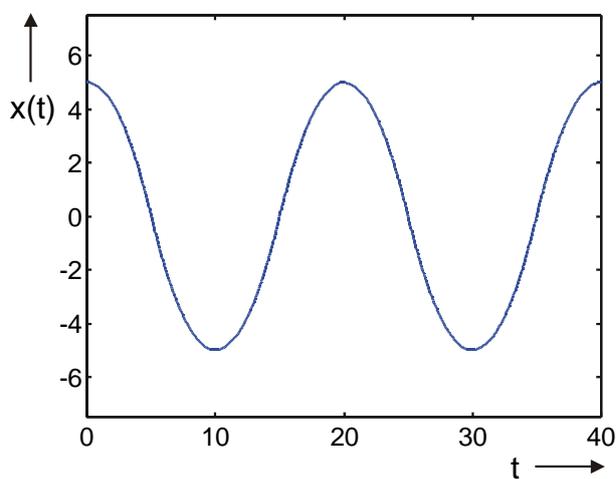
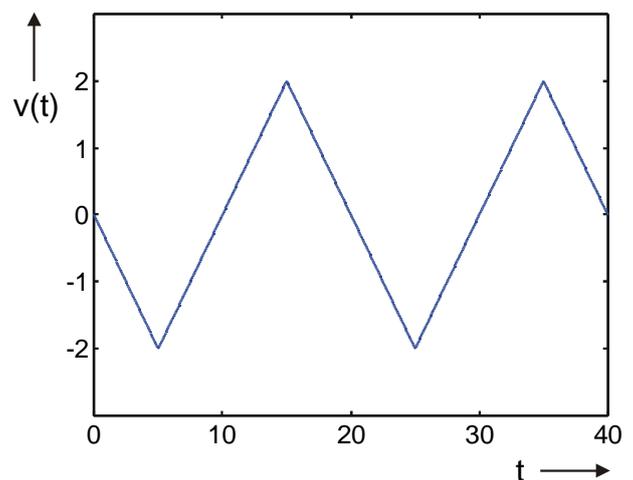
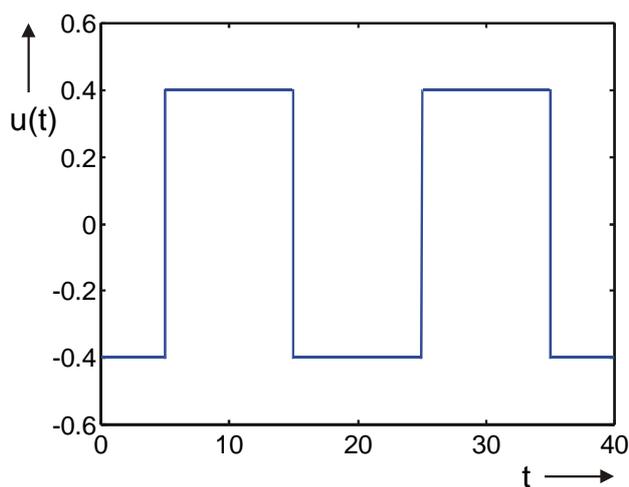
$$y = \begin{cases} ku^2, & u \leq 0 \\ -ku^2, & u \geq 0 \end{cases} \\ = -ku|u|$$



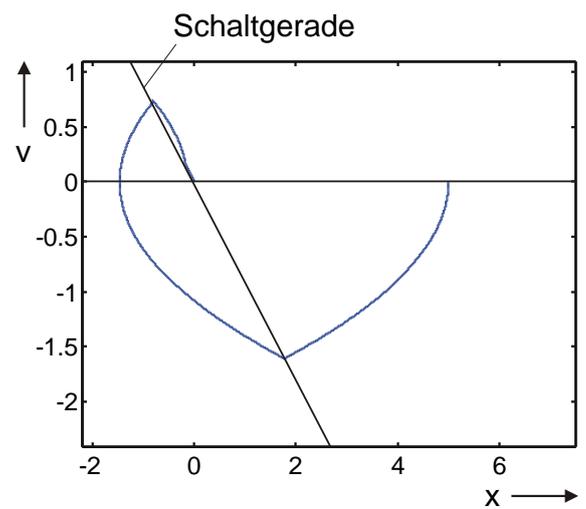
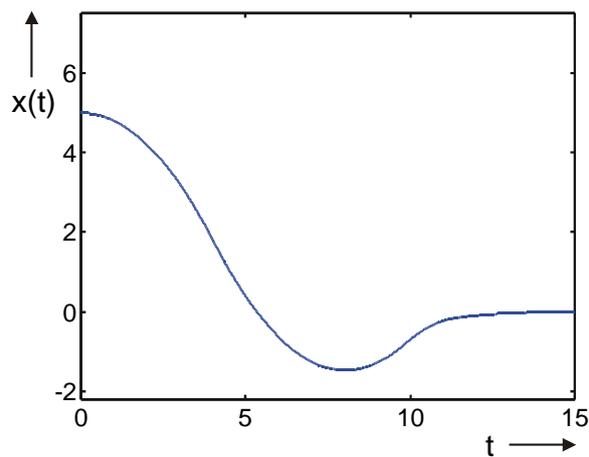
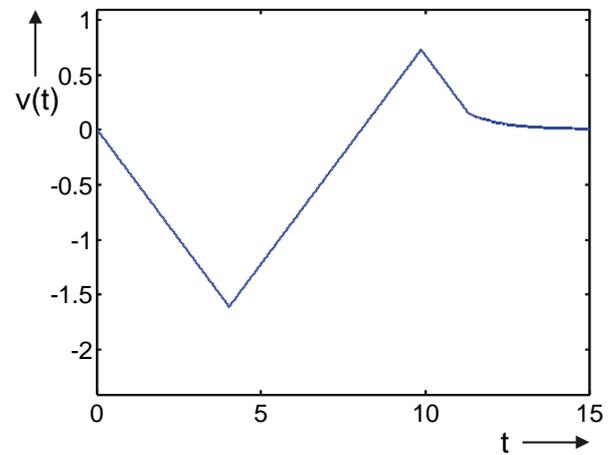
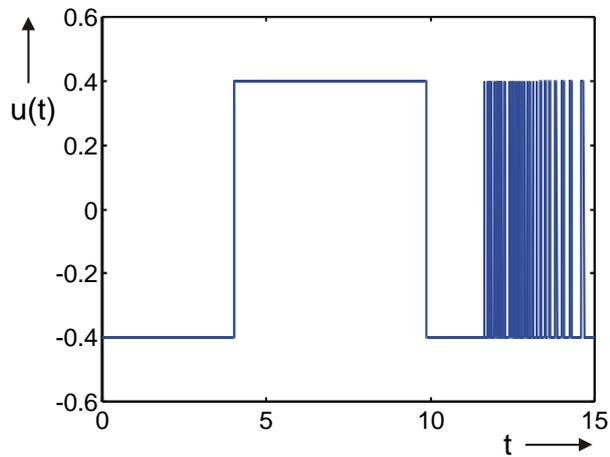


Simulationsverläufe bei Variation von K_R :

1. $K_R = 0$

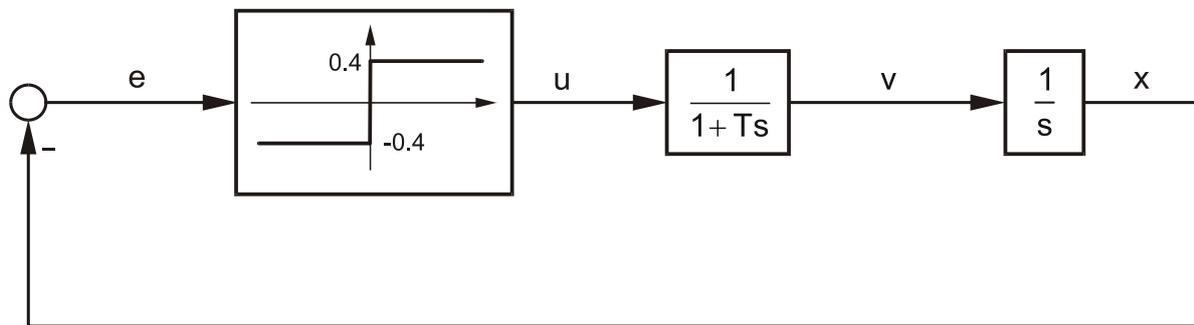


2. $K_R = 1.1$

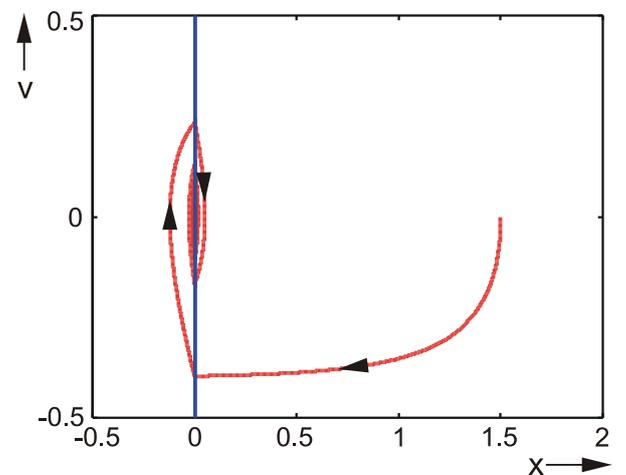
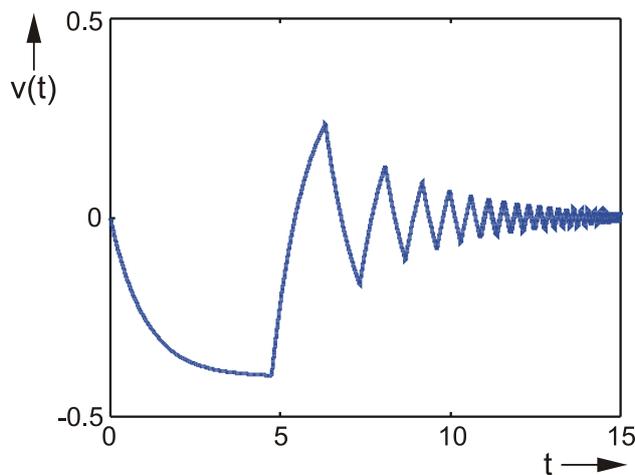
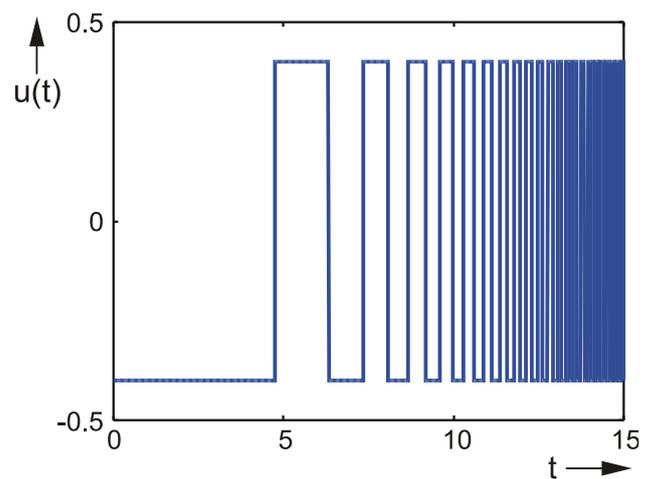
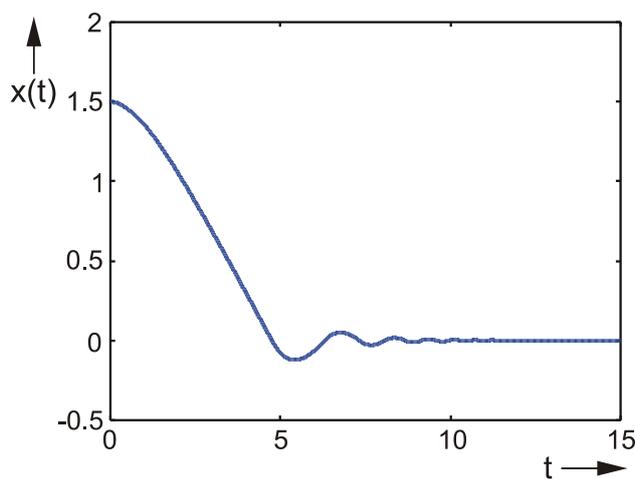


2.2 Beispiele zur Phasenebene: Gedämpfte Lageregelstrecke

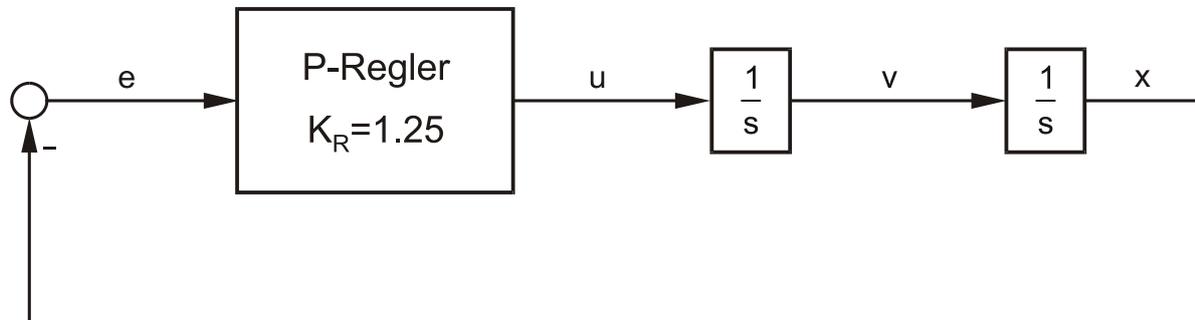
NLR 2-18



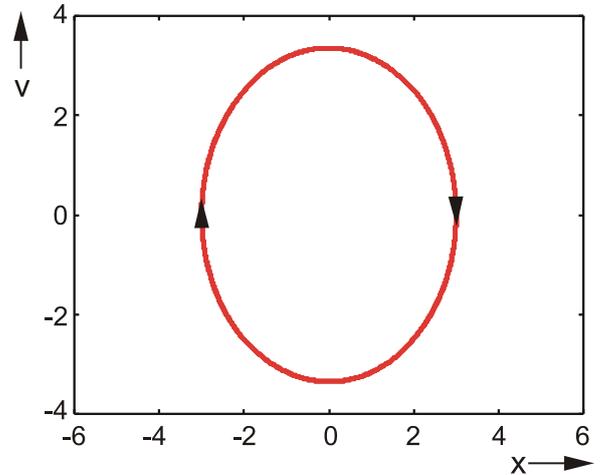
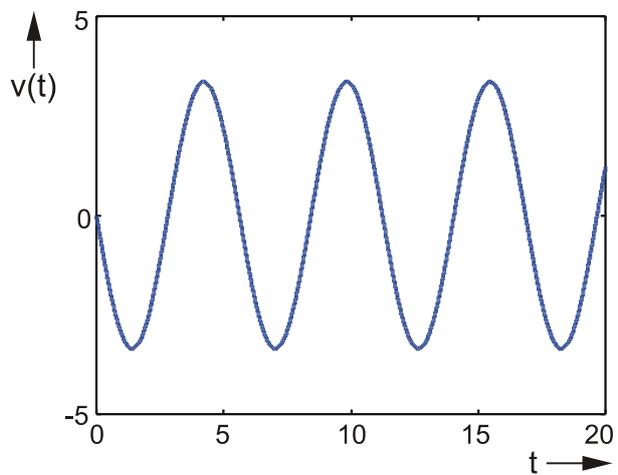
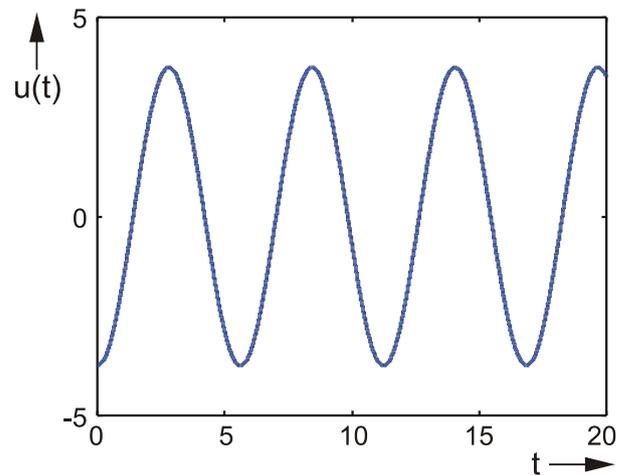
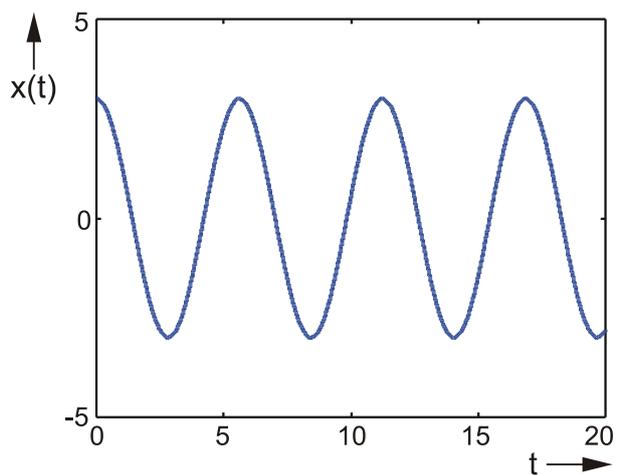
Simulationsergebnisse:



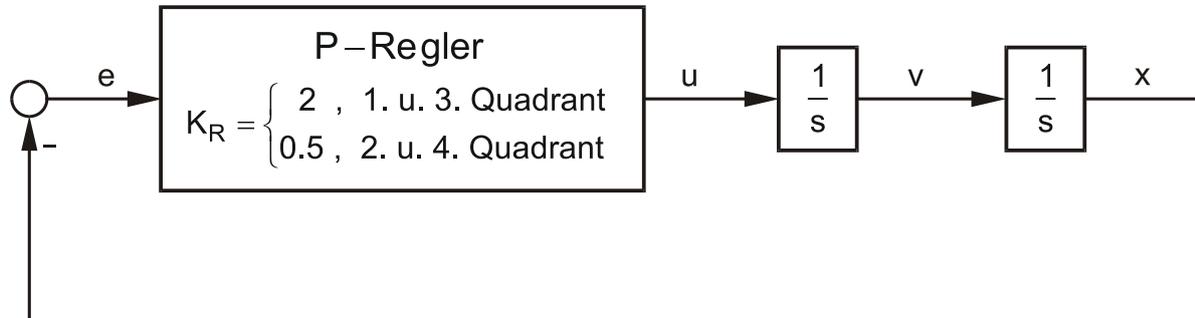
1. Fester P-Regler



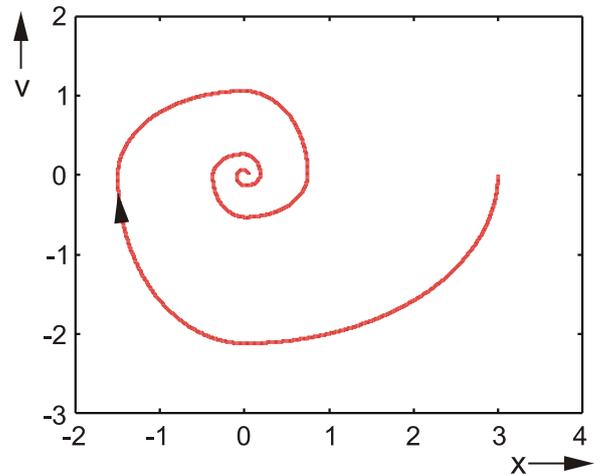
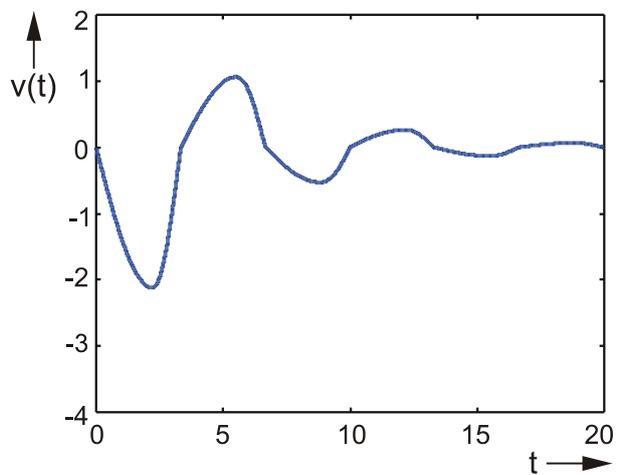
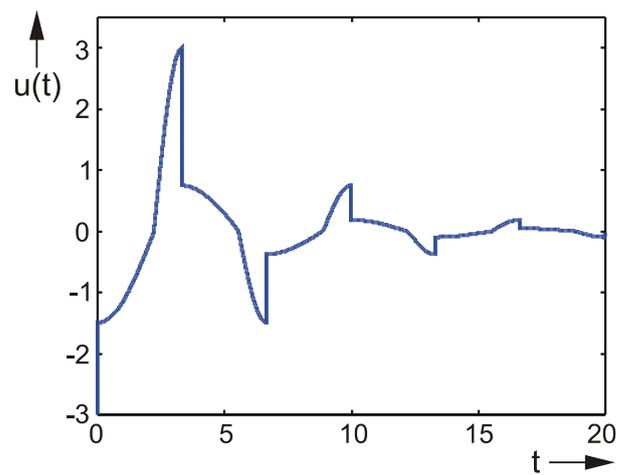
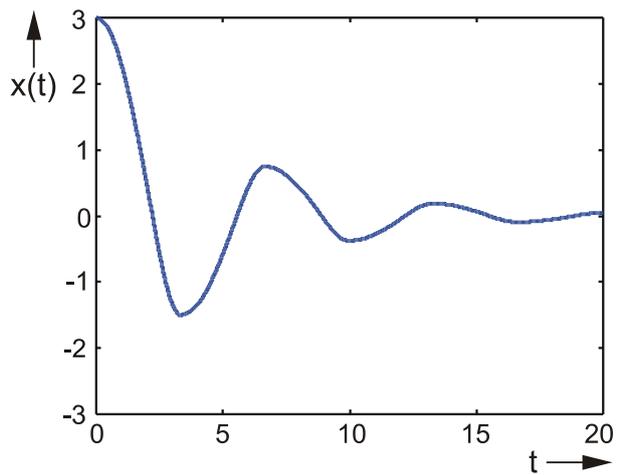
Simulationsergebnisse:



2. Umschaltender P-Regler



Simulationsergebnisse:



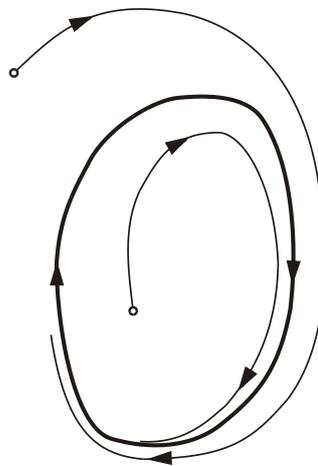
Grenzyklus

Eine Dauerschwingung (stellt in der Zustandsebene eine geschlossene Kurve C dar), deren Nachbartrajektorien ihr gegenüber ein Grenzverhalten zeigen.

Es gibt 3 Arten des Stabilitätsverhaltens von Grenzyklen:

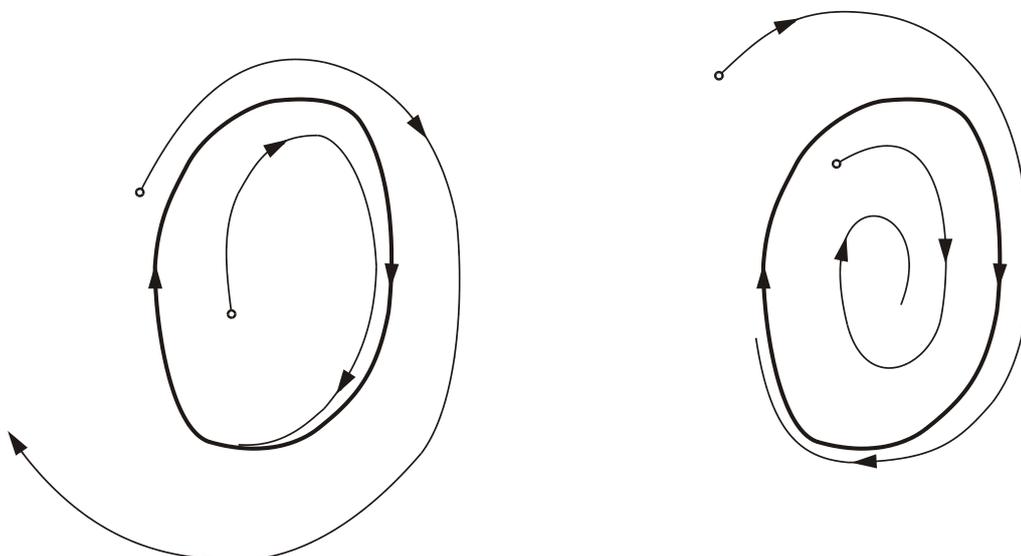
a) asymptotisch bahnstabil

sämtliche Systemtrajektorien streben mit wachsender Zeit gegen C :



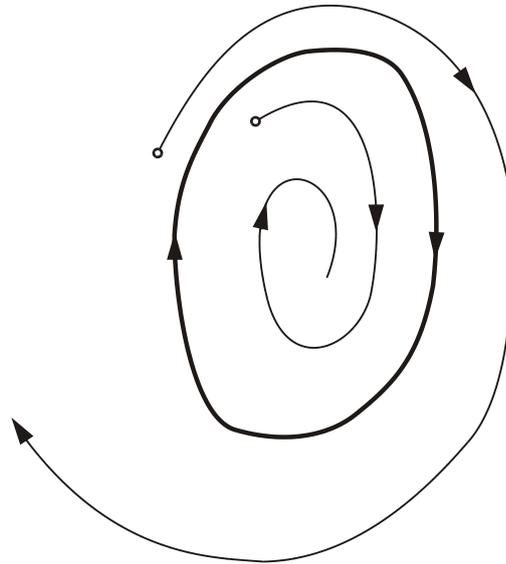
b) asymptotisch semibahnstabil

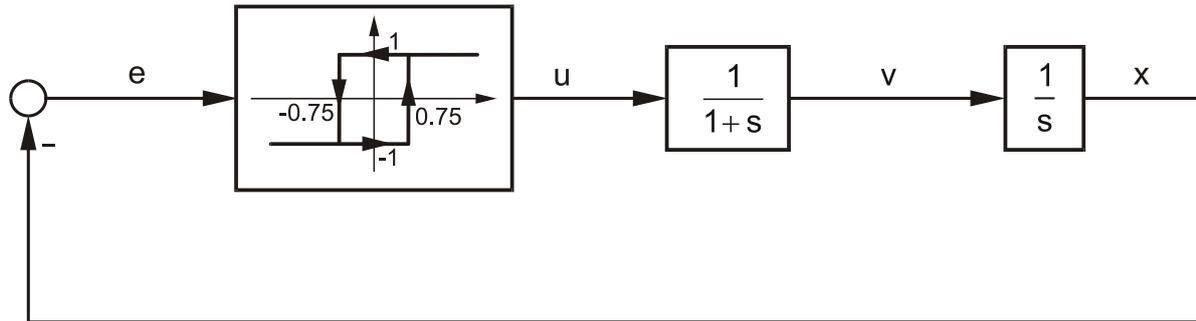
die Systemtrajektorien streben mit wachsender Zeit nur von innen oder nur von außen nach C (Voraussetzung: eine eindeutige Aufteilung in Innen- u. Außengebiet ist möglich):



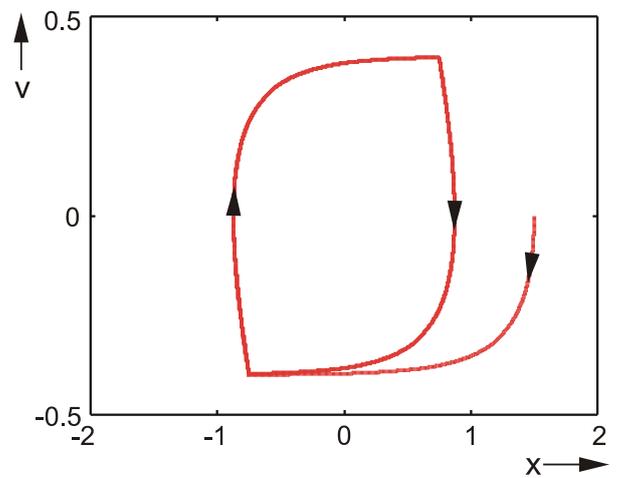
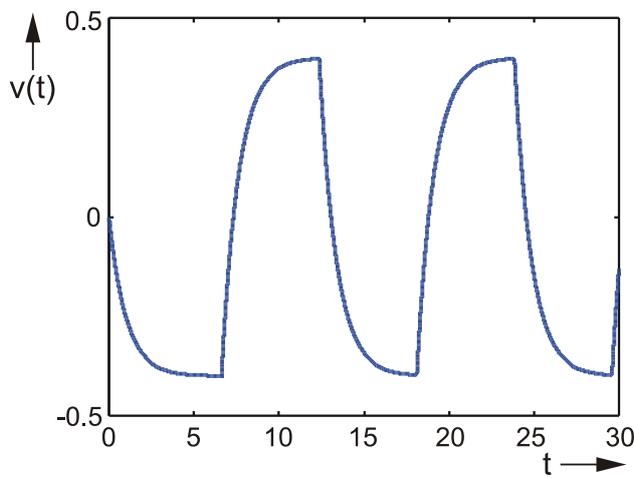
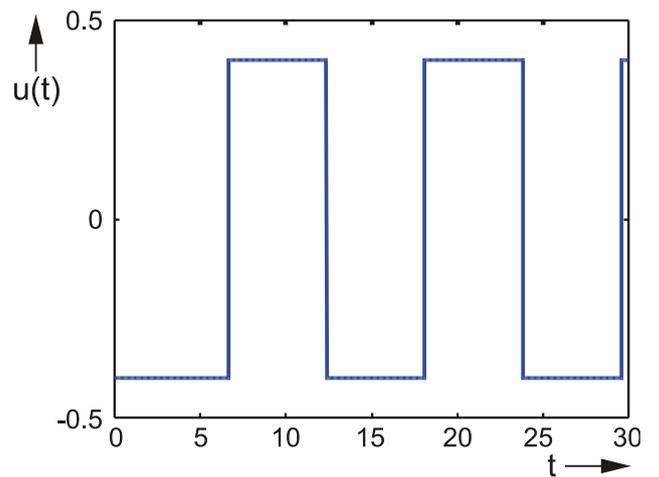
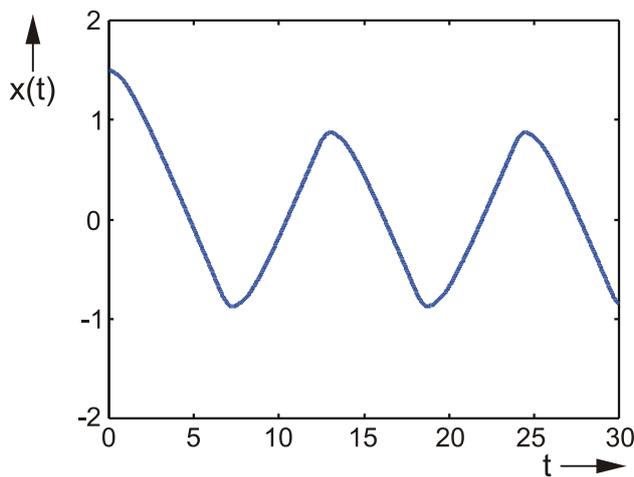
c) Instabil

die Systemtrajektorien streben mit wachsender Zeit sowohl von innen wie von außen von C weg:

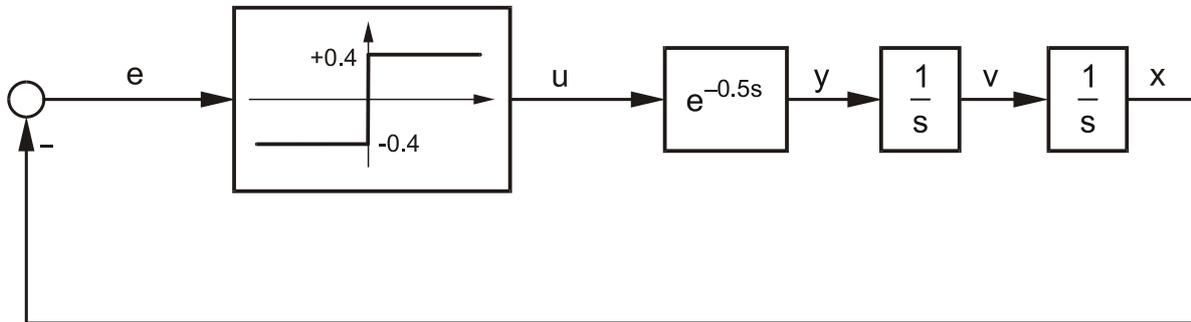




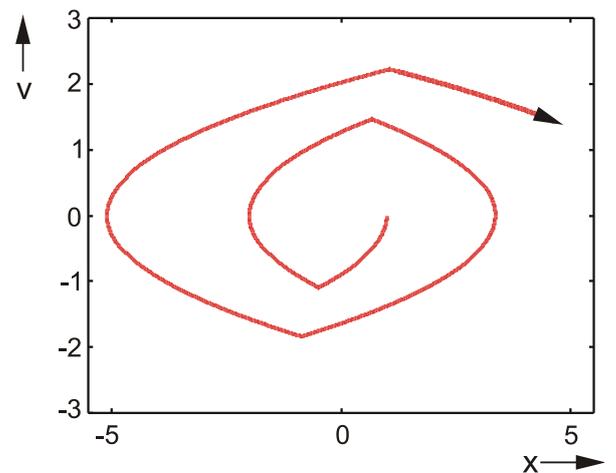
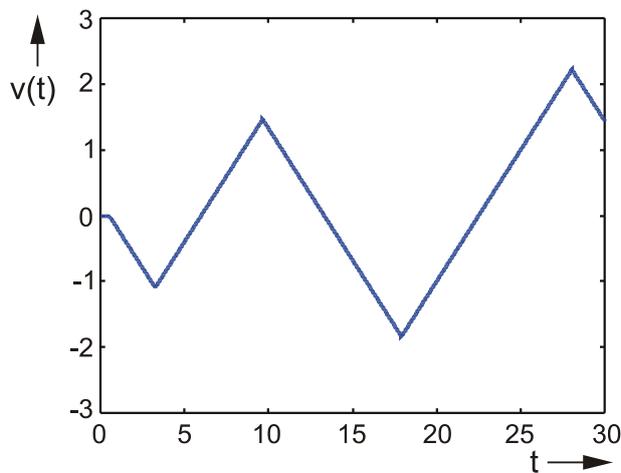
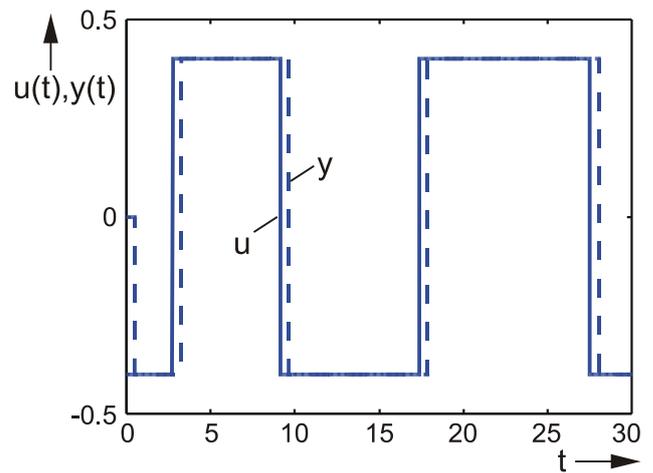
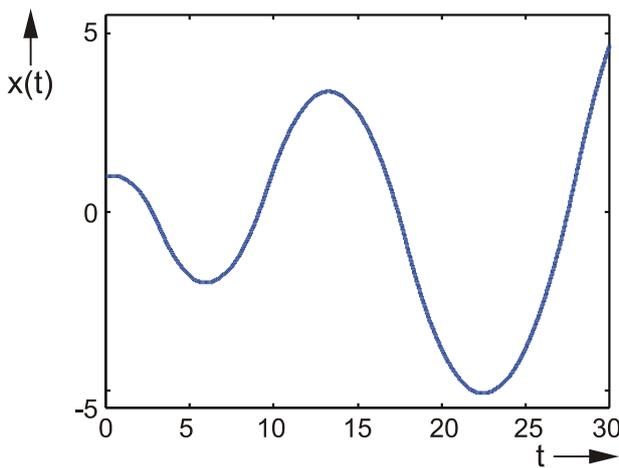
Simulationsergebnisse:



Lageregelungstrecke mit Totzeit



Simulationsergebnisse:



1. Stabilitätstheorem von Lyapunov

(Föllinger: Kriterium für Stabilität im Kleinen)

Gegeben sei ein System $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ mit der Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$. In einem Gebiet $D \subset \mathbb{R}^n$, welches \underline{x}_R enthält, gebe es eine stetig differenzierbare Funktion $V(\underline{x}) : D \rightarrow \mathbb{R}$ mit

- $V(\underline{0}) = 0$
- $V(\underline{x}) > 0$ in $D - \{\underline{0}\}$
- $\dot{V}(\underline{x}) \left(= \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \dot{x}_i = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} f_i = \left[\frac{\partial V}{\partial \underline{x}} \right]^T \cdot \underline{f}(\underline{x}) \right) \leq 0$ in D .

Dann ist die Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$ **stabil**.

Falls zusätzlich

$$\dot{V}(\underline{x}) < 0 \text{ in } D - \{\underline{0}\}$$

gilt, so ist die Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$ **asymptotisch stabil**.

2. Kriterium für asymptotische Stabilität mit begrenztem Einzugsbereich

(Föllinger: Kriterium für asymptotische Stabilität im Großen)

Es gelten die Voraussetzungen für asymptotische Stabilität von Theorem 1.

Das Gebiet $\Omega_c = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid V(\underline{x}) \leq c \}$ (vergl. Beweis zu Theorem 1) in D sei beschränkt und umrandet von der Kurve $V(\underline{x}) = c$.

Dann ist $\underline{x}_R = \underline{0}$ asymptotisch stabil und Ω_c gehört zum Einzugsbereich.

3. Barbashin-Krasovskii-Theorem

(Föllinger: Kriterium für asymptotische Stabilität im Ganzen)

Gegeben sei ein System $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ mit der Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$. Wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $V(\underline{x}) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt mit

- $V(\underline{0}) = 0$, $V(\underline{x}) > 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0}$
- $\dot{V}(\underline{x}) < 0 \quad \forall \underline{x} \neq \underline{0}$
- $\|\underline{x}\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(\underline{x}) \rightarrow \infty$ ($\hat{=}$ $V(\underline{x})$ radial unbeschränkt),

so ist $\underline{x}_R = \underline{0}$ **global asymptotisch stabil**.

Positiv invariante Menge

L heißt positiv invariante Menge bzgl. $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, wenn gilt:

$$\underline{x}(0) \in L \Rightarrow \underline{x}(t) \in L \quad \forall t \geq 0 .$$

Positive Grenzmenge

L^+ heißt positiv invariante Grenzmenge bzgl. $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T > 0: \text{dist}(\underline{x}(t), L) = \inf_{\underline{x} \in L} \|\underline{x}(t) - \underline{x}\| < \varepsilon \quad \forall t > T .$$

Mit diesen beiden Definitionen gilt folgende Aussage (ohne Beweis):

Ist die Lösung $\underline{x}(t)$ von $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ beschränkt und verbleibt sie in einem Gebiet D für alle $t \geq 0$, so ist die positiv invariante Grenzmenge L^+ bzgl. $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ eine nicht-leere, beschränkte und positiv invariante Menge, für die gilt:

$$\underline{x}(t) \rightarrow L^+ \text{ für } t \rightarrow \infty .$$

1. Theorem von Lasalle

$\Omega \subset D$ sei eine beschränkte positiv-invariante Menge bezüglich $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$. $V(\underline{x}): D \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare Funktion mit $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$ in Ω . E sei die Menge aller Punkte in Ω , für die gilt $\dot{V}(\underline{x}) = 0$, M die größte positiv-invariante Menge in E . Dann gilt: Jede Trajektorie $\underline{x}(t)$, die in Ω startet, nähert sich für $t \rightarrow \infty$ der Menge M an.

Speziell für den Spezialfall $V(\underline{x}) > 0$ und die Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$ gilt dann (vgl. auch Stabilitätstheoreme von Lyapunov und Barbashin-Krasovskii):

$\underline{x}_R = \underline{0}$ sei Ruhelage von $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$. $V(\underline{x}): D \rightarrow \mathbb{R}$ sei eine stetig differenzierbare positiv definite Funktion in dem die Ruhelage beinhaltenden Gebiet D mit $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0$ in D .

Es gebe keine in D identisch verbleibende Trajektorie mit $\dot{V}(\underline{x}) = 0$ außer $\underline{x}(t) \equiv \underline{0}$. Dann ist $\underline{x}_R = \underline{0}$ **asymptotisch stabil**.

Gilt darüber hinaus die radiale Unbeschränktheit von $V(\underline{x})$ mit $\dot{V}(\underline{x}) \leq 0 \quad \forall \underline{x} \in \mathbb{R}^n$, so ist $\underline{x}_R = \underline{0}$ **global asymptotisch stabil**.

2. Chetaevs-Theorem (Kriterium für Instabilität)

Gegeben sei die Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$ von $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$. In einem die Ruhelage beinhaltenden Gebiet D sei $V(\underline{x}): D \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $V(\underline{0}) = 0$ und $V(\underline{x}(0)) > 0$ für einige $\underline{x}(0)$ (mit $\|\underline{x}(0)\|$ beliebig klein).

Auf der Menge $B_r = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\underline{x}\| \leq r\}$ (siehe auch Beweis zu Stabilitätstheorem von Lyapunov) sei die Menge $U = \{\underline{x} \in B_r \mid V(\underline{x}) > 0\}$ definiert.

Wenn dann in U $\dot{V}(\underline{x}) > 0$ gilt, so ist $\underline{x}_R = \underline{0}$ **instabil**.

Eine quadratische Form

$$V(\underline{x}) = \sum_{i,k=1}^n p_{ik} x_i x_k = \underline{x}^T \underline{P} \underline{x}$$

$$(\underline{P} \text{ symmetrisch, d.h. } p_{ik} = p_{ki} \text{ bzw. } \underline{P}^T = \underline{P})$$

ist genau dann positiv definit, wenn alle „nordwestlichen“ Unterdeterminanten D_1, \dots, D_n

$$\text{von } \underline{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\text{mit } D_1 = p_{11}, D_2 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = |\underline{P}|$$

sämtlich positiv sind.

Das Kriterium gilt auch für **quadratische Pseudo-Formen**

$$V(\underline{x}) = \sum_{i,k=1}^n p_{ik}(x_1, \dots, x_n) x_i x_k = \underline{x}^T \underline{P}(\underline{x}) \underline{x}$$

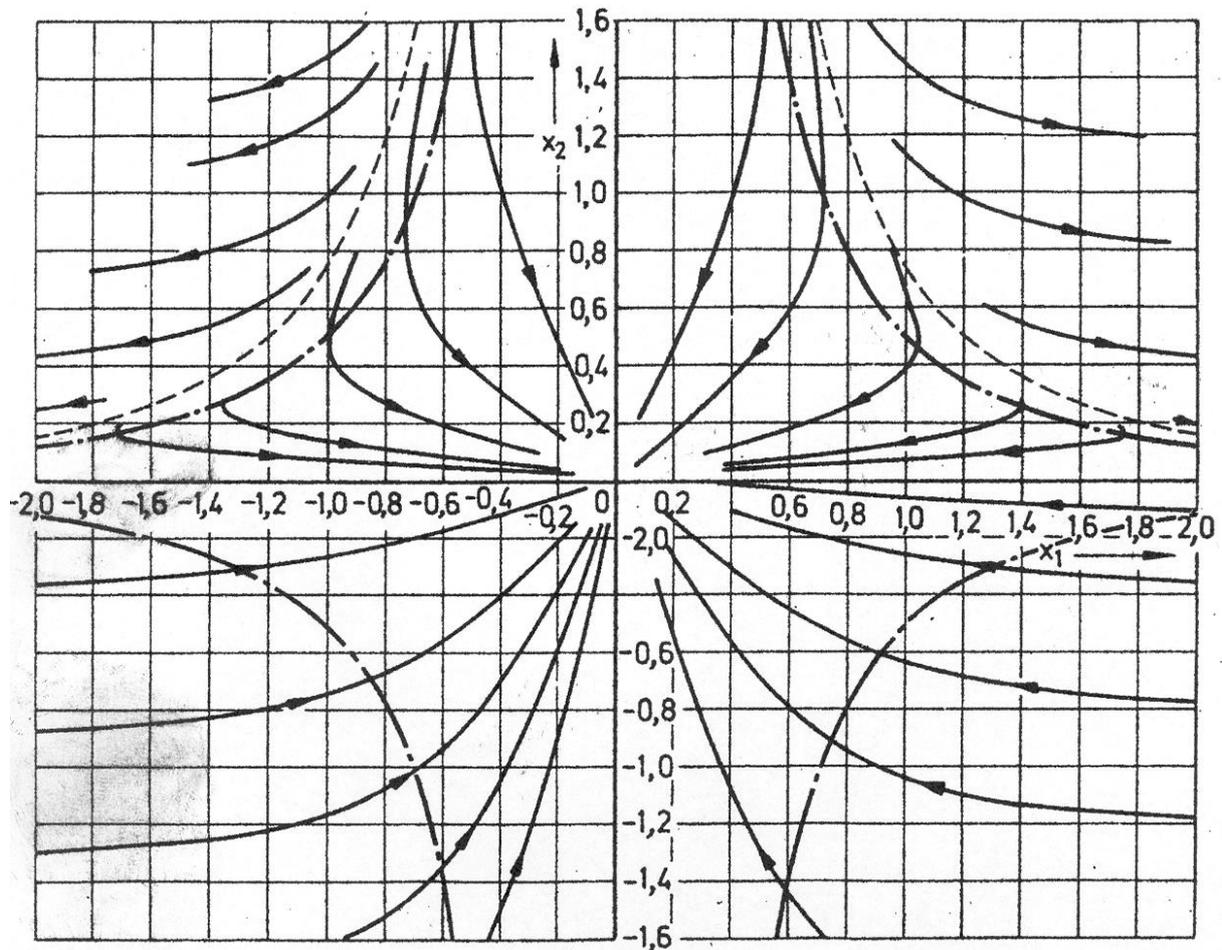
$$(\underline{P}(\underline{x}) \text{ symmetrisch, d.h. } p_{ik}(\underline{x}) = p_{ki}(\underline{x})) .$$

Es gilt:

Erfüllen die Koeffizienten $p_{ik}(\underline{x})$ der Pseudo-Form $V(\underline{x})$ in einem den Nullpunkt enthaltenden Bereich des Zustandsraumes das Kriterium von Sylvester, so ist $V(\underline{x})$ positiv definit.

System: $\dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1^3 x_2$
 $\dot{x}_2 = -x_2$

Trajektorienbild für verschiedene Anfangspunkte:



- : Ungefähre Grenze des Einzugsbereichs.
- · - · - · : Grenze des Teils des Einzugsbereichs, der durch Anwendung der Direkten Methode gesichert ist.

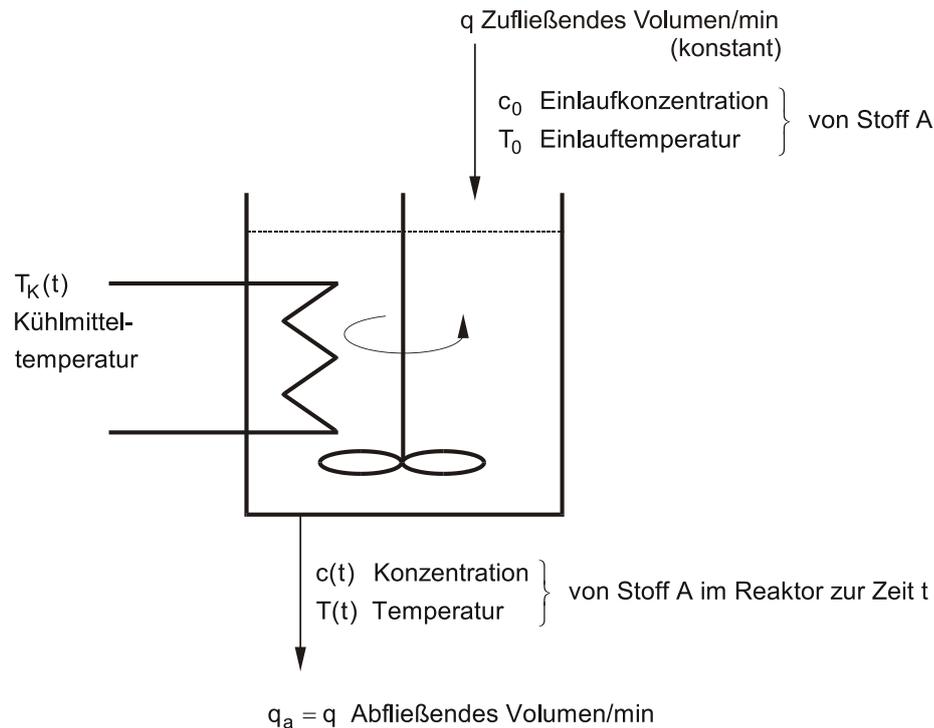
Gegeben sei ein System $\dot{\underline{x}} = \underline{f}(\underline{x})$ mit der Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$. In der Nachbarschaft D der Ruhelage sei $\underline{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar mit

$$\underline{A} = \left. \frac{\partial \underline{f}}{\partial \underline{x}}(\underline{x}) \right|_{\underline{x} = \underline{x}_R = \underline{0}} \quad .$$

Dann gilt:

- a) Liegen die Eigenwerte von \underline{A} , also die Nullstellen der charakteristischen Gleichung $\det(s\underline{I} - \underline{A}) = 0$, sämtlich links der j-Achse, so ist die Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$ des nichtlinearen Systems **asymptotisch stabil**.
- b) Liegt mindestens ein Eigenwert von \underline{A} rechts der j-Achse, so ist die Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$ des nichtlinearen Systems **instabil**.
- c) Liegt mindestens ein Eigenwert von \underline{A} auf der j-Achse, aber keiner rechts davon, so kann die Ruhelage $\underline{x}_R = \underline{0}$ des nichtlinearen Systems **asymptotisch stabil, nur stabil oder instabil** sein.

Rührkesselreaktor



Zustandsvariablen: $x_1 = \frac{c_0 - c}{c_0}$, $x_2 = \frac{T - T_0}{T_0}$.

Eingangsgröße: $u = \frac{T_K - T_0}{T_0}$.

Zustandsdifferentialgleichungen:

$$\dot{x}_1 = -a_{11}x_1 + \rho(x_1, x_2) \quad ,$$

$$\dot{x}_2 = -a_{21}x_2 + a_{22}\rho(x_1, x_2) + bu$$

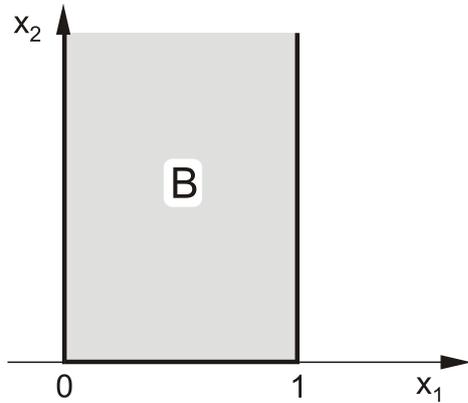
bzw.

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{11}x_1 + \rho(x_1, x_2) \\ -a_{21}x_2 + a_{22}\rho(x_1, x_2) \end{bmatrix}}_{\underline{a}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}}_{\underline{b}(\underline{x})} u$$

mit

$$\rho(x_1, x_2) = \left[(1 - x_1) + \underbrace{\mu(1 - x_1)^v}_{\text{kann häufig vernachlässigt werden}} \right] k_0 e^{-\frac{\varepsilon}{1+x_2}} \approx (1 - x_1) k_0 e^{-\frac{\varepsilon}{1+x_2}} .$$

Arbeitsbereich in der
Zustandsebene:



Zahlenbeispiel (Zeitnormierung: 1 min):

$$\begin{aligned} c_0 &= 3.14 \frac{\text{mol}}{\ell} , \\ T_0 &= 308.5 \text{ K} , \\ a_{11} &= 0.2674 , \\ a_{21} &= 1.815 , \\ a_{22} &= 0.4682 , \\ b &= 1.5476 , \\ \mu &= 0.8 , \\ \nu &= 6.5 , \\ k_0 &= 1.05 \cdot 10^{14} , \\ \varepsilon &= 34.2894 . \end{aligned}$$

Berechnung der Ruhelagen:

$$0 = -a_{11}x_{1R} + \rho(x_{1R}, x_{2R}), \quad (1)$$

$$0 = -a_{21}x_{2R} + a_{22} \rho(x_{1R}, x_{2R}) + bu_R. \quad (2)$$

Für $\rho(x_{1R}, x_{2R})$ ergibt sich aus (1):

$$\rho(x_{1R}, x_{2R}) = a_{11}x_{1R}.$$

Damit lautet (2):

$$-a_{21}x_{2R} + a_{11}a_{22}x_{1R} + bu_R = 0 \quad \leadsto \quad x_{1R} = \frac{1}{a_{11}a_{22}} (a_{21}x_{2R} - bu_R). \quad (3)$$

Andererseits lässt sich die Konzentration in der Ruhelage schreiben als

$$a_{11}x_{1R} = (1 - x_{1R})k_0 e^{-\frac{\varepsilon}{1+x_{2R}}}$$

$$\leadsto \quad x_{1R} = \left(\frac{a_{11}}{k_0} e^{\frac{\varepsilon}{1+x_{2R}}} + 1 \right)^{-1}. \quad (4)$$

Für jedes u_R besitzt das System eine Ruhelage, und zwar dort, wo sich die Verläufe der Funktionen (3) und (4) in der (x_{2R}, x_{1R}) -Ebene schneiden. Für die Ruhewerte

$$u_{R1} = -0.0218 \quad \text{und} \quad u_{R2} = 0$$

ergeben sich beispielsweise die beiden im Bild 1 eingezeichneten Ruhelagen

$$\underline{x}_{R1} = \begin{bmatrix} 0.414 \\ 0.01 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{x}_{R2} = \begin{bmatrix} 0.721 \\ 0.05 \end{bmatrix} .$$

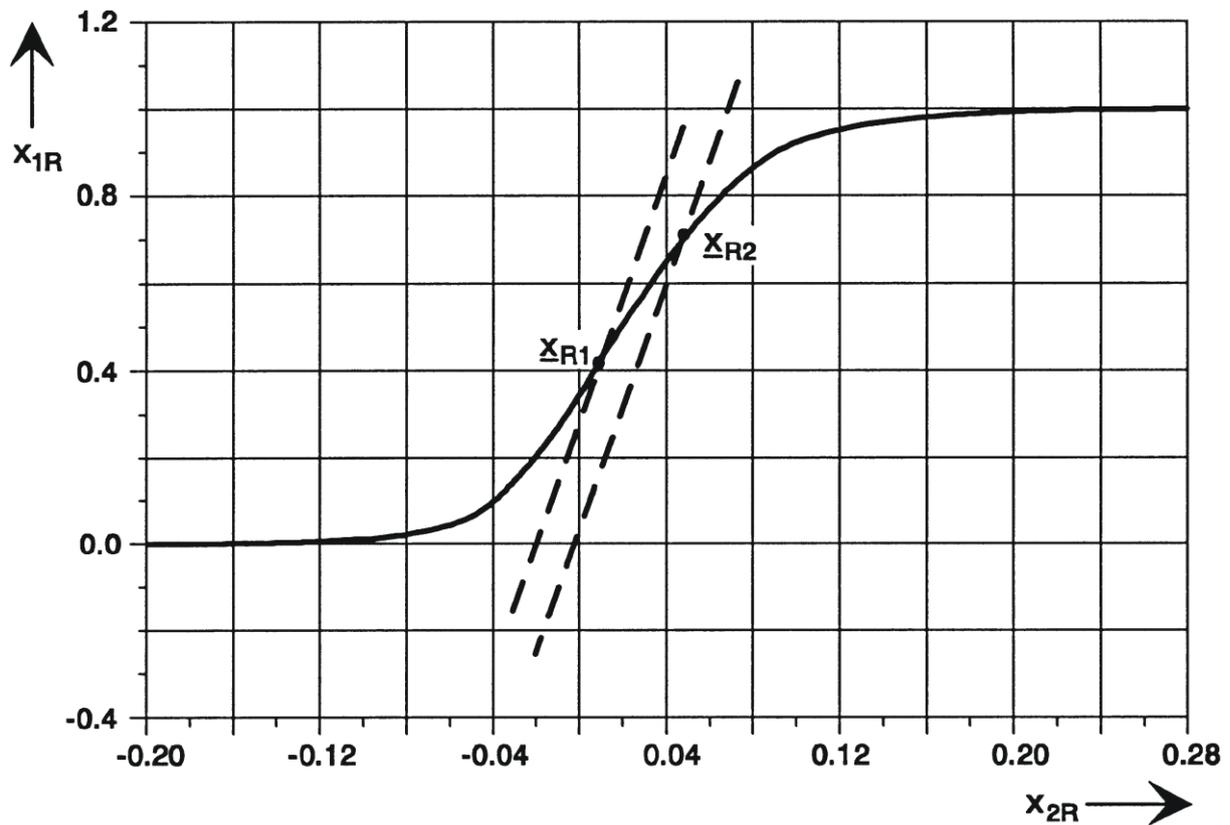


Bild 1

Anwendung der Methode der 1. Näherung:

Das um die Ruhelage \underline{x}_R linearisierte System lautet

$$\dot{\underline{\Delta x}} = \left[\begin{array}{cc} -a_{11} + \frac{\partial \rho(x_1, x_2)}{\partial x_1} & \frac{\partial \rho(x_1, x_2)}{\partial x_2} \\ a_{22} \frac{\partial \rho(x_1, x_2)}{\partial x_1} & -a_{21} + a_{22} \frac{\partial \rho(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{array} \right]_{\underline{x} = \underline{x}_R} \cdot \underline{\Delta x} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} \Delta u$$

mit

$$\frac{\partial \rho(x_1, x_2)}{\partial x_1} = -k_0 e^{-\frac{\varepsilon}{1+x_2}},$$

$$\frac{\partial \rho(x_1, x_2)}{\partial x_2} = (1-x_1) k_0 \frac{\varepsilon}{(1+x_2)^2} e^{-\frac{\varepsilon}{1+x_2}}.$$

Somit ergeben sich die beiden um die Ruhelagen \underline{x}_{R1} und \underline{x}_{R2} linearisierten Systeme zu

$$\dot{\underline{\Delta x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.457 & 3.727 \\ -0.089 & -0.07 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_1} \underline{\Delta x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1.5476 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \Delta u$$

und

$$\dot{\underline{\Delta x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0.957 & 5.984 \\ -0.323 & 0.987 \end{bmatrix}}_{\underline{A}_2} \underline{\Delta x} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 1.5476 \end{bmatrix}}_{\underline{b}} \Delta u.$$

Eigenwerte von \underline{A}_1 : $\det(s\mathbf{I} - \underline{A}_1) = 0$

↙ $s_{1,2} = -0.258 \pm j 0.540$: Beide Eigenwerte von \underline{A}_1 liegen links der j-Achse (Fall a)

↙ Ruhelage \underline{x}_{R1} des nichtlinearen Systems ist asymptotisch stabil!

Eigenwerte von \underline{A}_2 : $\det(s\mathbf{I} - \underline{A}_2) = 0$

↘ $s_{1,2} = +0.015 \pm j 0.994$: Beide Eigenwerte von \underline{A}_2 liegen rechts der j-Achse (Fall b)

↘ Ruhelage \underline{x}_{R2} des nichtlinearen Systems ist instabil!

Dieses Verhalten der Ruhelage wird anhand von Trajektorien in den Bildern 2 und 3 bekräftigt:

1. Trajektorienverläufe in der Umgebung von \underline{x}_{R1} :

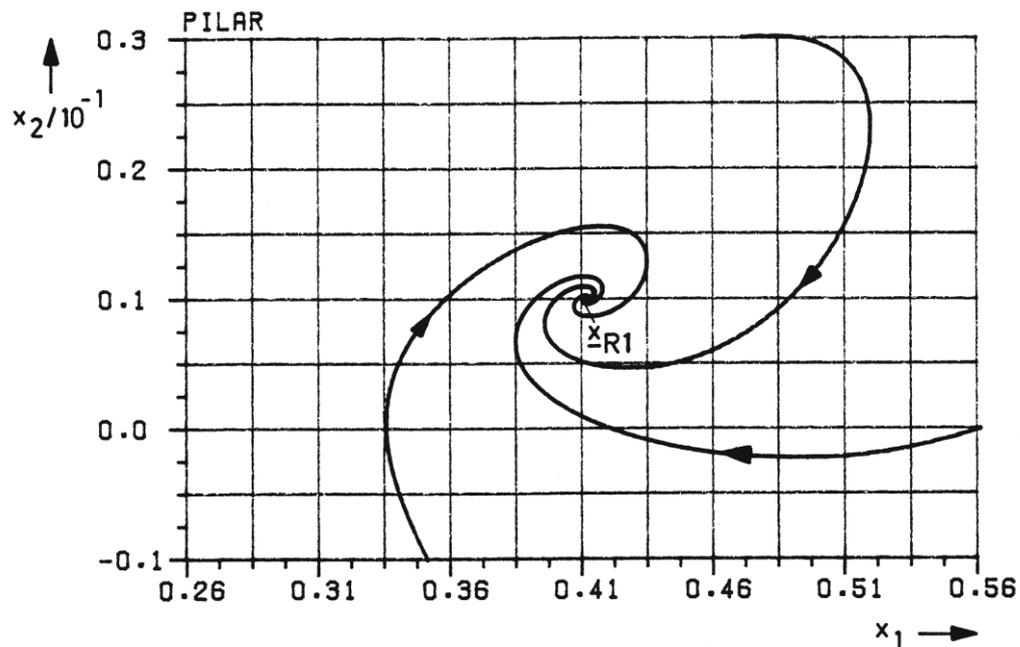


Bild 2

2. Verlauf einer Trajektorie, die in der Umgebung von \underline{x}_{R2} beginnt:

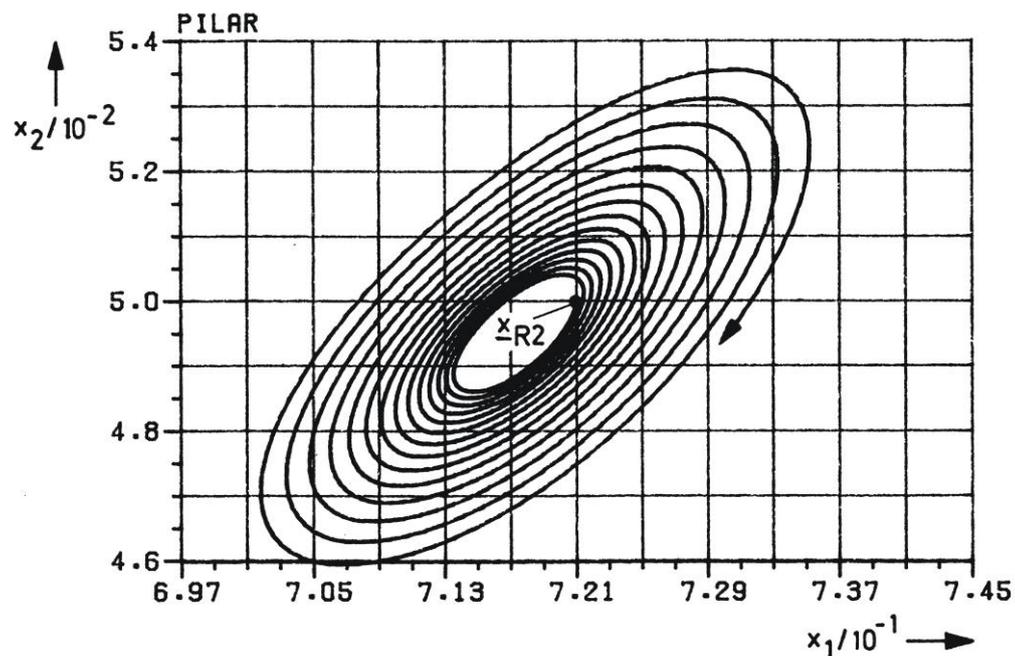


Bild 3

Gegeben sei ein nichtlineares Eingrößensystem

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{a}(\underline{x}) + \underline{b}(\underline{x})u, \\ & \quad (\underline{a}, \underline{b}, c \text{ bel. oft differenzierbar}) \\ y &= c(\underline{x}).\end{aligned}$$

Es besitzt dann in dem Gebiet Ω des Zustandsraums die **Differenzordnung** δ , wenn $\forall x \in \Omega$ gilt:

- $L_{\underline{b}} L_{\underline{a}}^k c(\underline{x}) = 0 \quad \forall k, 0 \leq k < \delta - 1$
- $L_{\underline{b}} L_{\underline{a}}^{\delta-1} c(\underline{x}) \neq 0$.

Anmerkungen:

1. Im Unterschied zum linearen Fall kann sich die Differenzordnung also je nach betrachtetem Gebiet des Zustandsraums ändern.
Insbesondere kann dies dazu führen, dass sich an besonderen Punkten keine Differenzordnung definieren lässt, z.B. wenn in einer beliebig nahen Umgebung eines Punktes \underline{x}_p zwar $L_{\underline{b}} L_{\underline{a}}^{\delta-1} c(\underline{x}) \neq 0$ ist, jedoch in \underline{x}_p selbst $L_{\underline{b}} L_{\underline{a}}^{\delta-1} c(\underline{x}_p) = 0$ gilt.
2. Die Differenzordnung kann nie größer als die Systemordnung sein, das heißt es gilt stets $\delta \leq n$. Dies ist eine Folge der linearen Unabhängigkeit der $L_{\underline{b}} L_{\underline{a}}^k c(\underline{x})$, $k = 0, \dots, \delta - 1$, was im n -dimensionalen Raum zu der obigen Aussage führt.
Sollte also $L_{\underline{b}} L_{\underline{a}}^k c(\underline{x}) = 0 \quad \forall k, 0 \leq k \leq n - 1$ gelten, so ist der Systemausgang nicht vom Systemeingang abhängig, sondern wird nur vom Anfangszustand $\underline{x}(0)$ beeinflusst.

4.1.2 Transformation auf Byrnes-Isidori-Normalform (SISO-Fall)

NLR 4-2

Gegeben sei ein nichtlineares Eingrößensystem der Form

$$\dot{\underline{x}} = \underline{a}(\underline{x}) + \underline{b}(\underline{x})u,$$

$$y = c(\underline{x})$$

mit der Differenzordnung δ in einem Gebiet Ω des Zustandsraums. Mit Hilfe der Lie-Ableitungen $L_a^i c(\underline{x})$, $i=0, \dots, \delta-1$, lassen sich dann in Ω **lokale Zustands-transformationen** $\underline{z} = \underline{\phi}(\underline{x})$ angeben mit

$$\underline{\phi}(\underline{x}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ \phi_n(\underline{x}) \end{bmatrix}, \quad z_i = \phi_i(\underline{x}).$$

Die einzelnen Transformationsvorschriften ϕ_i ergeben sich wie folgt:

- $i = 1, \dots, \delta$: $\phi_i = L_a^{i-1} c(\underline{x})$

- $i = \delta + 1, \dots, n$: ϕ_i alternativ

α) aus $L_b \phi_i = 0$
(stets möglich, führt auf partielle Dgln.)

β) beliebig so, dass die *Jacobi-Matrix* $\left. \frac{\partial \phi}{\partial \underline{x}} \right|_{x \in \Omega}$ regulär ist.

Diese Transformation führt abhängig von der Wahl der ϕ_i nach α) oder β) dann jeweils auf folgende Systemgestalt:

α) Eingangsnormalisierte Byrnes-Isidori-Normalform

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\delta-1} &= z_\delta, \\ \dot{z}_\delta &= f(\underline{z}) + g(\underline{z})u, \\ \dot{z}_{\delta+1} &= h_{\delta+1}(\underline{z}), \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= h_n(\underline{z}).\end{aligned}$$

β) Byrnes-Isidori-Normalform

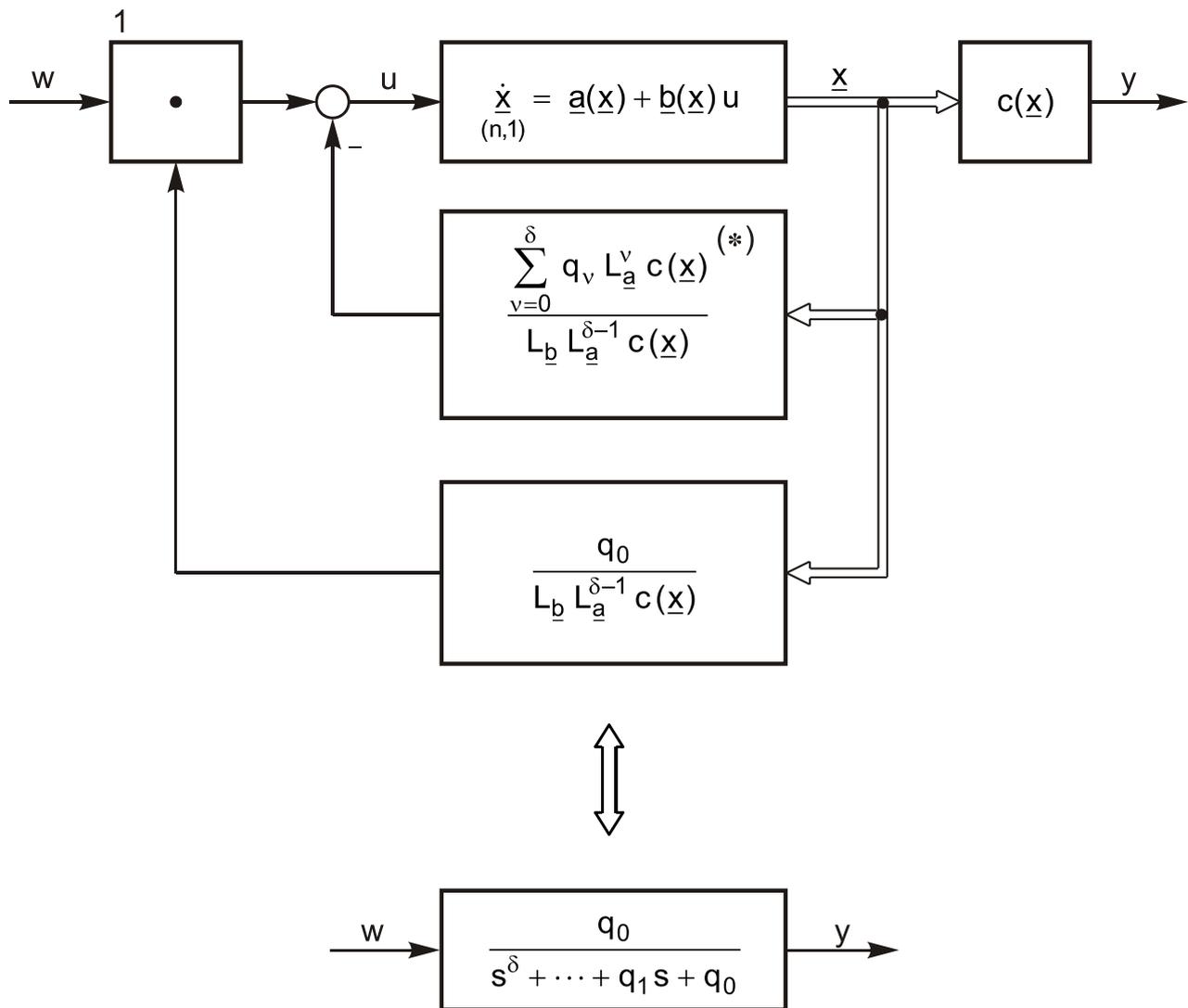
$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= z_2, \\ &\vdots \\ \dot{z}_{\delta-1} &= z_\delta, \\ \dot{z}_\delta &= f(\underline{z}) + g(\underline{z})u, \\ \dot{z}_{\delta+1} &= h_{\delta+1}(\underline{z}) + k_{\delta+1}(\underline{z})u, \\ &\vdots \\ \dot{z}_n &= h_n(\underline{z}) + k_n(\underline{z})u.\end{aligned}$$

Hinzu kommt jeweils noch die Ausgangsgleichung

$$y = z_1 .$$

4.1.3 Struktur der Ein-/Ausganglinearisierung (SISO-Fall)

NLR 4-4



(*) $q_{\delta}=1$

- Dabei gilt:
- $\delta \leq n$ ist die Differenzordnung der Strecke,
 - die Polynomkoeffizienten $q_0, q_1, \dots, q_{\delta-1}$ werden durch Polvorgabe bestimmt.

System:

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -a_{11}x_1 + \rho(x_1, x_2) \\ -a_{21}x_2 + a_{22}\rho(x_1, x_2) \end{bmatrix}}_{\underline{a}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix}}_{\underline{b}(\underline{x})} u$$

mit

$$\rho(x_1, x_2) = \left[(1-x_1) + \underbrace{\mu(1-x_1)^\nu}_{\text{kann häufig vernachlässigt werden}} \right] k_0 e^{-\frac{\varepsilon}{1+x_2}} \approx (1-x_1)k_0 e^{-\frac{\varepsilon}{1+x_2}} .$$

Die Konstanten seien wie auf dem Beiblatt NLR 3-8 gewählt.

Mit

$$y = x_1$$

ergibt sich wegen $\delta = 2$ und mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung:

$$\begin{aligned} c &= x_1 , \\ L_{\underline{a}}c &= -a_{11}x_1 + \rho , \\ L_{\underline{a}}^2c &= (-a_{11} + \rho_1)(-a_{11}x_1 + \rho) + \rho_2(-a_{21}x_2 + a_{22}\rho) , \end{aligned}$$

sowie

$$L_{\underline{b}}L_{\underline{a}}c = b\rho_2$$

mit $\rho = \rho(x_1, x_2)$, $\rho_1 = \frac{\partial \rho}{\partial x_1}$, $\rho_2 = \frac{\partial \rho}{\partial x_2}$.

Damit berechnet sich der Regler zu

$$u = \frac{1}{b\rho_2} \left[-L_{\underline{a}}^2c - q_1L_{\underline{a}}c - q_0c + q_0w \right] ,$$

also

$$u = \frac{q_0}{b\rho_2} w - \frac{(-a_{11}x_1 + \rho)(-a_{11} + \rho_1 + q_1) + q_0x_1 + \rho_2(-a_{21}x_2 + a_{22}\rho)}{b\rho_2} .$$

Bild 2 zeigt das dynamische Verhalten des unregulierten Rührkesselreaktors für den Anfangswert $\underline{x}^T(0) = (1 \ 0)$ und die Steuergröße $u(t) \equiv 0$.

Um die auftretenden Schwingungen zu unterbinden, werden *reelle* Eigenwerte des Regelkreises vorgeschrieben:

$$\lambda_{R1} = \lambda_{R2} = -1 .$$

Wegen

$$s^2 + q_1s + q_0 = (s + 1)^2 = s^2 + 2s + 1$$

folgt daraus

$$q_0 = 1 , \quad q_1 = 2 .$$

Bild 3: Verhalten des geregelten Systems bei einem Führungssprung.

Bild 4: Zum Vergleich: Verhalten des konventionell mit einem P-Regler geregelten Systems beim gleichen Führungssprung wie im Bild 3.

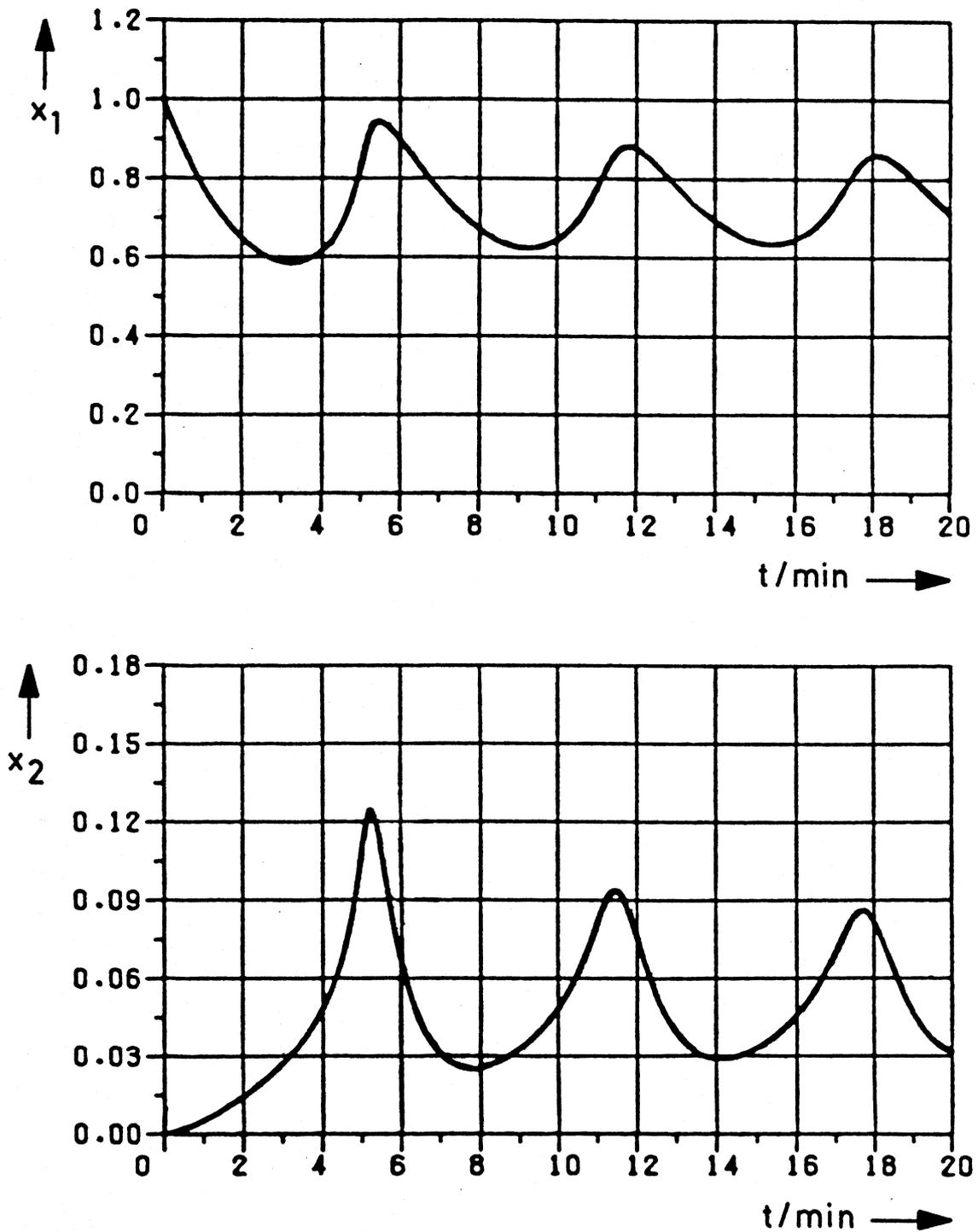


Bild 2: Verhalten der Strecke

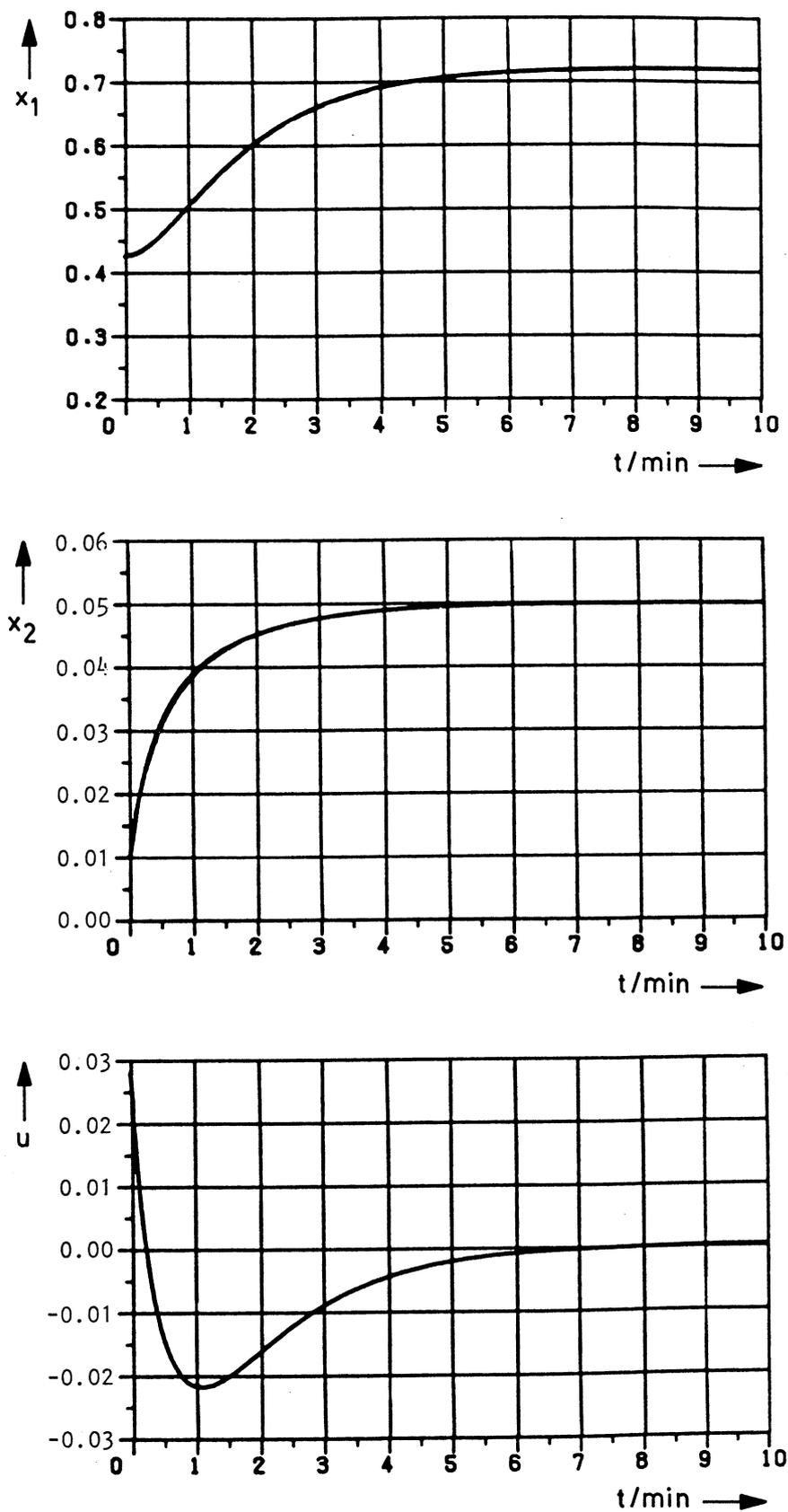


Bild 3: Führungsverhalten der Regelung

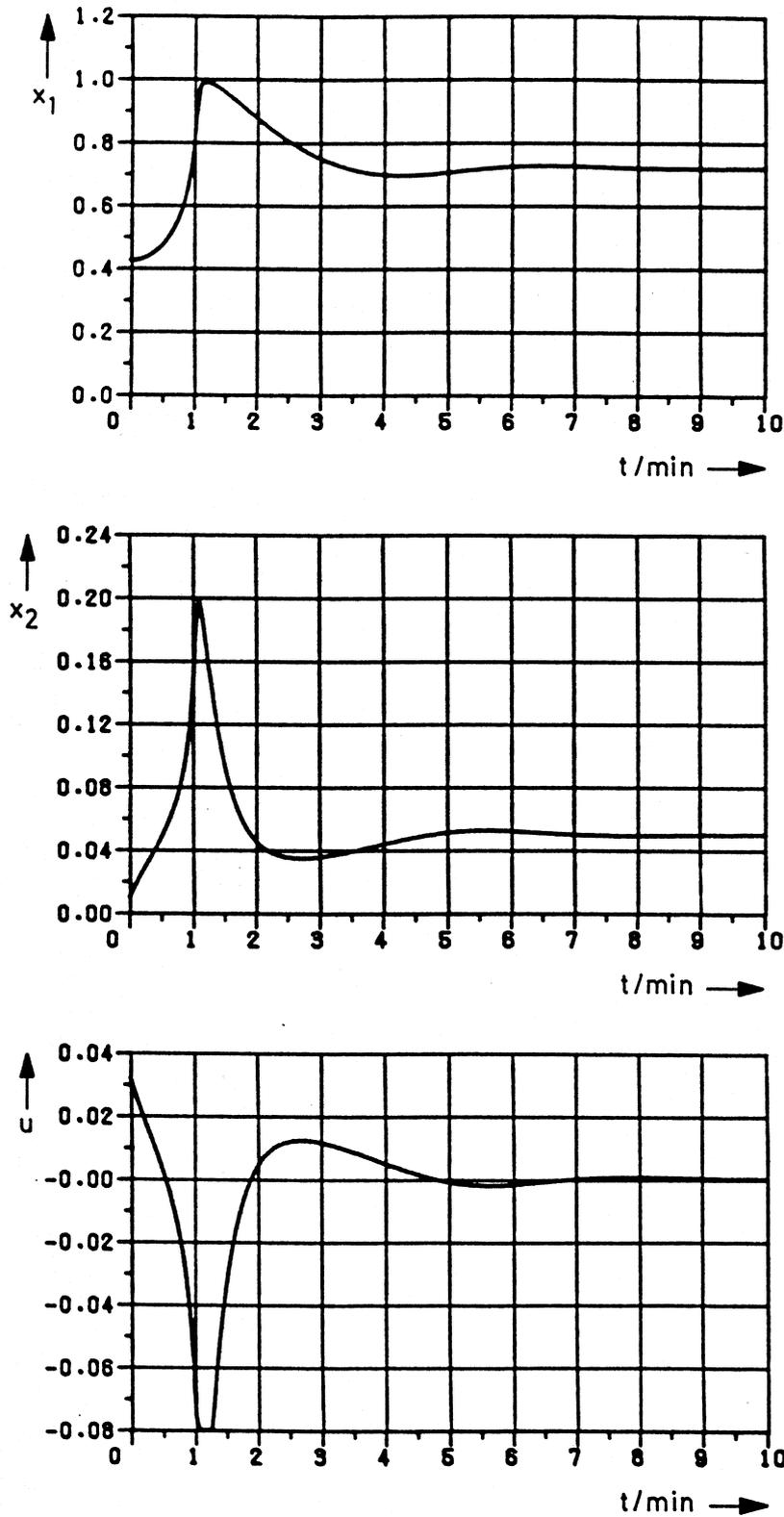


Bild 4: Vergleich mit der konventionellen Regelung

Gegeben sei ein nichtlineares Eingrößensystem mit einer Differenzordnung $\delta < n$, das auf die Byrnes-Isidori-Normalform (BINF) mit den neuen Zustandsgrößen

$\underline{z} = [z_1, \dots, z_\delta; z_{\delta+1}, \dots, z_n]^T = [\underline{\xi}^T; \underline{\eta}^T]^T$ transformiert worden ist:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\delta-1} &= \xi_\delta, \\ \dot{\xi}_\delta &= f(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + g(\underline{\xi}, \underline{\eta})u, \\ \dot{\eta} &= \underline{h}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + \underline{k}(\underline{\xi}, \underline{\eta})u. \end{aligned} \tag{1}$$

Nulldynamik

Unter der Nulldynamik des Systems versteht man das dynamische Verhalten des Systemanteils $\underline{\eta}(t)$ unter der Voraussetzung, dass die Ausgangsgröße $y(t) \equiv 0 \quad \forall t$ ist.

Wegen

$$y(t) = \xi_1(t) = 0$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1(t) &= \xi_2(t) = 0, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{\delta-1}(t) &= \xi_\delta(t) = 0. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\underline{\xi}(t) \equiv \underline{0} \quad \forall t.$$

Das dazugehörige $u_N(t)$ berechnet sich dann wie folgt:

$$0 = f(\underline{0}, \underline{\eta}(t)) + g(\underline{0}, \underline{\eta}(t)) u_N(t)$$

$$\Rightarrow u_N(t) = - \frac{f(\underline{0}, \underline{\eta}(t))}{g(\underline{0}, \underline{\eta}(t))} . \quad (2)$$

(2) führt je nach vorliegender Normalform zu einer entsprechenden *Nulldynamik*:

- $\underline{k}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \underline{0}$ (eingangsnormalisierte BINF):

$$\dot{\underline{\eta}}(t) = \underline{h}(\underline{0}, \underline{\eta}(t)) \quad (3a)$$

- $\underline{k}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \neq \underline{0}$:

$$\dot{\underline{\eta}}(t) = \underline{h}(\underline{0}, \underline{\eta}(t)) - \underline{k}(\underline{0}, \underline{\eta}) \frac{f(\underline{0}, \underline{\eta}(t))}{g(\underline{0}, \underline{\eta}(t))} . \quad (3b)$$

Die Bedeutung von (3a) bzw. (3b) liegt nun in folgender Aussage (ohne Beweis) begründet:

Das System (1) besitze die Ruhelage $\underline{z}_R = \begin{bmatrix} \underline{\xi}_R^T \\ \underline{\eta}_R^T \end{bmatrix}^T = \underline{0}$. Liegt mit der Nulldynamik (3a) bzw. (3b) für beliebiges $\underline{\eta}(t_0)$ mit $\underline{\eta}_R = \underline{0}$ eine asymptotisch stabile Ruhelage vor, so ist bei einem stabilen Entwurf mittels Ein-/Ausganglinearisierung der δ Zustandsgrößen $\underline{\xi}(t)$ die gesamte Ruhelage $\underline{z}_R = \underline{0}$ ebenfalls asymptotisch stabil.

System:

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} -x_1 \\ x_1 x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}}_{=\underline{a}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} e^{x_2} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}_{=\underline{b}(\underline{x})} u \quad ,$$
$$y = c(\underline{x}) = x_3 \quad .$$

Bestimmung der Differenzordnung:

Zur Ermittlung der Differenzordnung werden die entsprechenden Lie-Ableitungen berechnet:

$$\begin{aligned} L_{\underline{b}}c(\underline{x}) &= [0 \ 0 \ 1] \cdot \underline{b}(\underline{x}) = 0 \quad , \\ L_{\underline{a}}c(\underline{x}) &= [0 \ 0 \ 1] \cdot \underline{a}(\underline{x}) = x_2 \quad , \\ L_{\underline{b}}L_{\underline{a}}c(\underline{x}) &= [0 \ 1 \ 0] \cdot \underline{b}(\underline{x}) = 1 \neq 0 \quad , \\ L_{\underline{a}}^2c(\underline{x}) &= [0 \ 1 \ 0] \cdot \underline{a}(\underline{x}) = x_1 x_2 \quad . \end{aligned}$$

Es ergibt sich also $\delta - 1 = 1$, die Differenzordnung lautet somit:

$$\delta = 2 \quad .$$

Lokale Zustandsraumtransformation:

Gemäß dem Vorgehen in der Vorlesung ergeben sich die ersten $\delta = 2$ Transformationsvorschriften zu

$$\begin{aligned} z_1 = \phi_1 &= c(\underline{x}) = x_3 \quad , \\ z_2 = \phi_2 &= L_{\underline{a}}c(\underline{x}) = x_2 \quad . \end{aligned}$$

Die dritte Transformationsvorschrift erhält man aus der Bedingung

$$\begin{aligned} L_{\underline{b}}\phi_3 &= \text{grad}^T \phi_3 \cdot \underline{b}(\underline{x}) \\ &= \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} e^{x_2} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} \\ &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Wie man leicht nachprüfen kann, lautet eine mögliche Lösung dieser partiellen Differentialgleichung

$$\phi_3(\underline{x}) = 1 + x_1 - e^{x_2} \quad .$$

Da die Jacobi-Matrix der somit definierten Transformation $\underline{z} = \underline{\phi}(\underline{x})$

$$\frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -e^{x_2} & 0 \end{bmatrix}$$

für alle Werte von \underline{x} regulär ist, ist die Transformation global gültig.

Die neuen Zustandsgleichungen berechnen sich zu

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \quad , \\ \dot{z}_2 &= (-1 + z_3 + e^{z_2})z_2 + u \quad , \\ \dot{z}_3 &= (1 - z_3 - e^{z_2})(1 + z_2 e^{z_2}) \quad , \end{aligned}$$

es liegt somit die eingangsnormalisierte Byrnes-Isidori-Normalform vor.

Ein-/ Ausgangslinearisation

Die Rückführung, die für die in der Vorlesung behandelte Ein-/Ausgangslinearisation sorgt, lautet in transformierten Koordinaten:

$$u(\underline{z}) = - \left[(-1 + z_3 + e^{z_2})z_2 + q_0 z_1 + q_1 z_2 - q_0 w \right]$$

und sorgt im geregelten System für partiell lineares Verhalten in den ersten beiden Zustandsgrößen:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= z_2 \quad , \\ \dot{z}_2 &= -q_0 z_1 - q_1 z_2 + q_0 w \quad . \end{aligned}$$

Die dritte Zustandsgröße z_3 bleibt hiervon unberührt:

$$\dot{z}_3 = (1 - z_3 - e^{z_2})(1 + z_2 e^{z_2}) .$$

Nulldynamik

Um zu überprüfen, ob bei der berechneten Rückführung die Ruhelage

$$\underline{z}_R = \underline{\phi}(\underline{x}_R = \underline{0}) = \underline{0}$$

asymptotisch stabil ist, genügt die Analyse der Nulldynamik des Systems.

Letztere besteht offenbar aus der dritten Differentialgleichung, in der gemäß den Ausführungen in der Vorlesung $z_1 = z_2 = 0$ gelten muss.

Damit lautet die Nulldynamik

$$\dot{z}_3 = -z_3 ,$$

ist also linear mit einem Eigenwert bei -1 . Damit ist $\underline{z}_R = \underline{0}$ (bei entsprechender Wahl von q_0, q_1 für stabile Eigenwerte in den ersten beiden Zustandsgrößen) folglich sogar eine global asymptotisch stabile Ruhelage.

Regelung in Originalkoordinaten

Insgesamt erhält man für das ursprüngliche System die Rückführung

$$u(\underline{x}) = -[x_1 x_2 + q_0 x_3 + q_1 x_2 - q_0 w] ,$$

die für lineares Verhalten in den Zustandsgrößen x_2 und x_3 sorgt, während die Dynamik von x_1 nichtlinear ist:

$$\dot{x}_1 = -x_1 + e^{x_2} (-x_1 x_2 - q_0 x_3 - q_1 x_2 + q_0 w) ,$$

$$\dot{x}_2 = -q_0 x_3 - q_1 x_2 + q_0 w ,$$

$$\dot{x}_3 = x_2 .$$

Gegeben sei ein nichtlineares Mehrgrößensystem

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \underline{a}(\underline{x}) + \underline{B}(\underline{x}) \underset{(p,1)}{\underline{u}} & \left(\underline{B}(\underline{x}) = \left[\underline{b}_1(\underline{x}), \dots, \underline{b}_p(\underline{x}) \right] \right), \\ \underset{(p,1)}{\underline{y}} &= \underline{c}(\underline{x}). \end{aligned}$$

Es besitzt dann in dem Gebiet Ω des Zustandsraums die **vektorielle Differenzordnung** $(\delta_1, \dots, \delta_p)$, wenn $\forall \underline{x} \in \Omega$ dort gilt:

$$\begin{aligned} L_{\underline{b}_j} L_{\underline{a}}^k c_i(\underline{x}) &= 0 \quad \forall k, 0 \leq k < \delta_{i-1}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p, \\ L_{\underline{b}_j} L_{\underline{a}}^{\delta_i-1} c_i(\underline{x}) &\neq 0. \end{aligned}$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$\left. \begin{aligned} L_{\underline{B}} c_i(\underline{x}) &= \underline{0}^T, \\ &\vdots \\ L_{\underline{B}} L_{\underline{a}}^{\delta_i-2} c_i(\underline{x}) &= \underline{0}^T, \\ L_{\underline{B}} L_{\underline{a}}^{\delta_i-1} c_i(\underline{x}) &\neq \underline{0}^T. \end{aligned} \right\} 1 \leq i \leq p$$

Die Summe $\delta = \delta_1 + \dots + \delta_p$ bezeichnet man dann als **Differenzordnung des Gesamtsystems**.

Bei dieser Definition gelten die Anmerkungen des Beiblatts NLR 4-1 in entsprechender Weise.

Gegeben sei ein nichtlineares Mehrgrößensystem der Form

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{a}(\underline{x}) + \underline{B}(\underline{x}) \underline{u}, \\ \underline{y} &= \underline{c}(\underline{x})\end{aligned}$$

mit p Ein- u. Ausgangsgrößen und der vektoriellen Differenzordnung $(\delta_1, \dots, \delta_p)$ ($\delta = \delta_1 + \dots + \delta_p$) in einem Gebiet Ω des Zustandsraums.

Dann ist dort analog zum Eingrößenfall die **lokale Zustandstransformation** $\underline{z} = \underline{\phi}(\underline{x}) = [\phi_1, \dots, \phi_n]^T$ möglich, bei der sich die einzelnen ϕ_i wie folgt berechnen:

- $i = 1, \dots, \delta$: ϕ_i gemäß dem Schema

$$\begin{bmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_\delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(\underline{x}) \\ \vdots \\ \phi_{1\delta_1}(\underline{x}) \\ \vdots \\ \phi_{p1}(\underline{x}) \\ \vdots \\ \phi_{p\delta_p}(\underline{x}) \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \left. \begin{aligned} \phi_{i_1} &= c_i(\underline{x}), \\ \phi_{i_2} &= L_{\underline{a}} c_i(\underline{x}), \\ &\vdots \\ \phi_{i_{\delta_i}} &= L_{\underline{a}}^{\delta_i-1} c_i(\underline{x}), \end{aligned} \right\} i = 1, \dots, p.$$

- $i = \delta + 1, \dots, n$: ϕ_i beliebig, so dass die *Jacobi-Matrix* $\left. \frac{\partial \underline{\phi}}{\partial \underline{x}} \right|_{x \in \Omega}$ regulär ist.

(Unterschied zum SISO-Fall (ohne Beweis): naheliegende Wahl aus $L_{\underline{B}} \underline{\phi}_i = \underline{0}^T$ (\Rightarrow eingangsnormalisierte BINF) nicht immer möglich!)

Gegeben sei ein nichtlineares Mehrgrößensystem mit einer Differenzordnung $\delta < n$, das auf Byrnes-Isidori-Normalform mit den neuen Zustandsgrößen

$\underline{z} = \begin{bmatrix} \underline{\xi}^T, \underline{\eta}^T \end{bmatrix}^T$ transformiert worden ist.

Die neuen Zustände gehorchen dann jeweils folgenden Dynamiken:

- $\underline{\xi} = \begin{bmatrix} \xi \\ \underline{\xi}_1 \\ \vdots \\ \xi \\ \underline{\xi}_{-p} \end{bmatrix}$: p Subsysteme für $\underline{\xi}_i$ gemäß

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_{i_1} &= \xi_{i_2}, \\ &\vdots \\ \dot{\xi}_{i_{\delta_i-1}} &= \xi_{i_{\delta_i}}, \\ \dot{\xi}_{i_{\delta_i}} &= f_i(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + \underline{g}_i^T(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \underline{u}. \end{aligned} \quad (i = 1, \dots, p) \quad (1)$$

- $\underline{\eta} = \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_{n-\delta} \end{bmatrix}$: $n - \delta$ Differentialgleichungen für η_i gemäß

$$\dot{\eta}_i = h_i(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + \underline{k}_i^T(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \underline{u}, \quad (i = 1, \dots, n - \delta)$$

also

$$\dot{\underline{\eta}} = \underline{h}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) + \underline{K}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \underline{u}. \quad (2)$$

Wie im Eingrößenfall ist für das Verhalten der unbeobachtbaren Dynamik (2) die Analyse der Nulldynamik ausreichend:

Das System (1), (2) besitze die Ruhelage $\underline{z}_R = \left[\underline{\xi}_R^T, \underline{\eta}_R^T \right]^T = \underline{0}$. Dann gelten folgende Aussagen (ohne Beweis):

Wählt man ganz analog zum Vorgehen im Eingrößenfall die Führungsgrößen gemäß

$$\underline{u}_N(t) = -\underline{D}^{*-1}(\underline{0}, \underline{\eta}(t)) \underline{f}(\underline{0}, \underline{\eta}(t))$$

$$\text{mit } \underline{D}^*(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \begin{bmatrix} \underline{g}_1^T(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \\ \vdots \\ \underline{g}_p^T(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \end{bmatrix}, \quad \underline{f}(\underline{\xi}, \underline{\eta}) = \begin{bmatrix} \underline{f}_1^T(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \\ \vdots \\ \underline{f}_p^T(\underline{\xi}, \underline{\eta}) \end{bmatrix},$$

so erhält man für (2) die **Nulldynamik**

$$\dot{\underline{\eta}}(t) = \underline{h}(\underline{0}, \underline{\eta}(t)) - \underline{K}(\underline{0}, \underline{\eta}(t)) \underline{D}^{*-1}(\underline{0}, \underline{\eta}(t)) \underline{f}(\underline{0}, \underline{\eta}(t)). \quad (3)$$

Hat (3) für beliebiges $\underline{\eta}(t_0)$ bei $\underline{\eta}_R = \underline{0}$ eine asymptotisch stabile Ruhelage, so ist bei einem stabilen Entwurf mittels Ein-/Ausganglinearisierung mit Entkopplung der δ Zustandsgrößen $\underline{\xi}(t)$ die gesamte Ruhelage $\underline{z}_R = \underline{0}$ ebenfalls asymptotisch stabil.

Gegeben sei ein nichtlineares Mehrgrößensystem der Form

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= \underline{a}(\underline{x}) + \underline{B}(\underline{x}) \underline{u}, \\ \underline{y} &= \underline{c}(\underline{x})\end{aligned}$$

mit p Ein- u. Ausgangsgrößen und der vektoriellen Differenzordnung $(\delta_1, \dots, \delta_p)$ in einem Gebiet Ω des Zustandsraums.

Dann gilt (ohne Beweis):

Eine **Entkopplung** des Systems (d.h. ein Verhalten wie p entkoppelte SISO-Systeme) ist in Ω genau dann möglich, wenn dort die **Entkoppelbarkeitsbedingung**

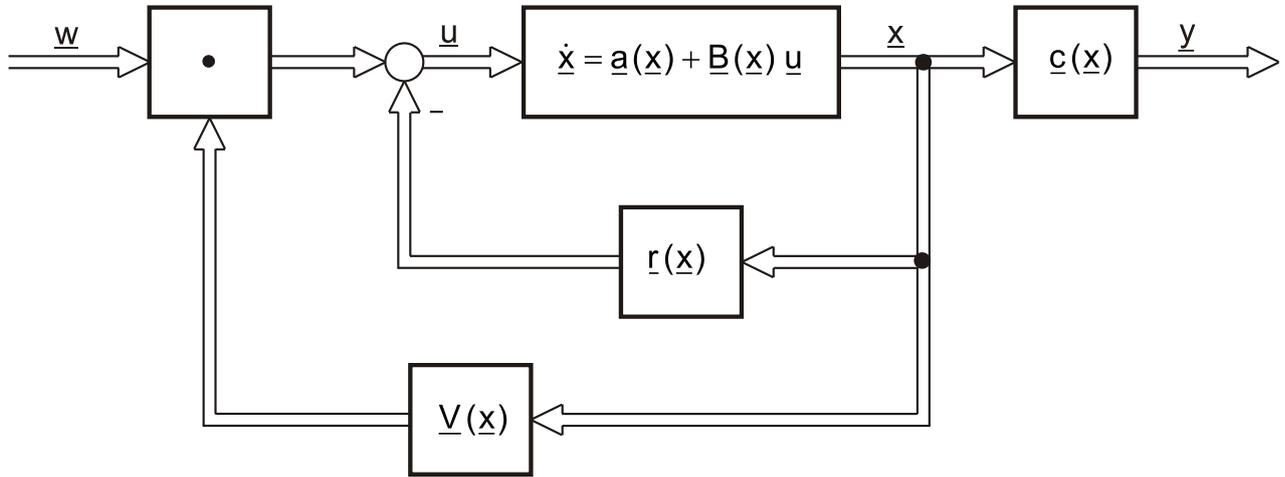
$$\det \underline{D}^*(\underline{x}) \Big|_{\underline{x} \in \Omega} \neq 0$$

erfüllt ist, d.h. die Matrix

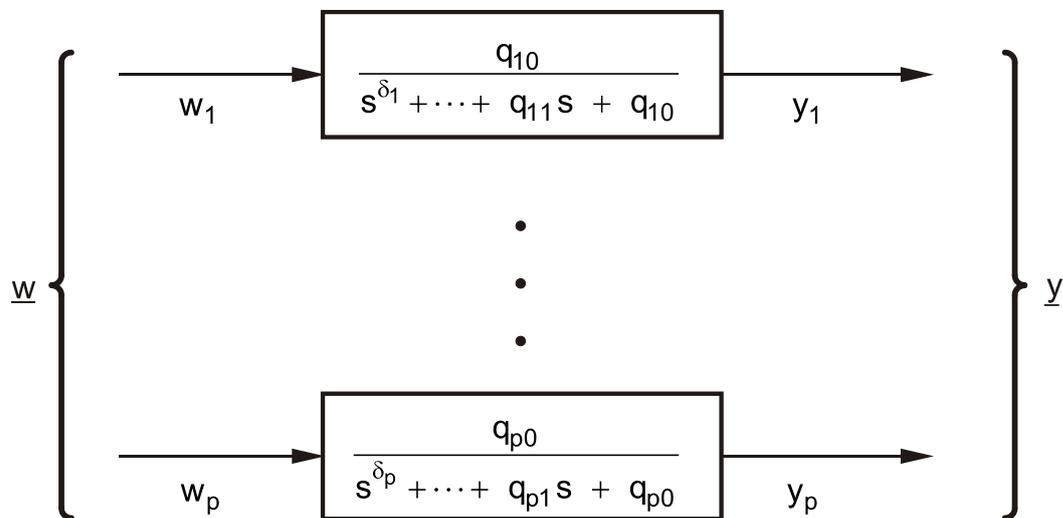
$$\underline{D}^*(\underline{x}) = \begin{bmatrix} L_{\underline{B}} L_{\underline{a}}^{\delta_1-1} c_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{B}} L_{\underline{a}}^{\delta_p-1} c_p(\underline{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{\underline{b}_1} L_{\underline{a}}^{\delta_1-1} c_1(\underline{x}) \dots L_{\underline{b}_p} L_{\underline{a}}^{\delta_1-1} c_1(\underline{x}) \\ \vdots \\ L_{\underline{b}_1} L_{\underline{a}}^{\delta_p-1} c_p(\underline{x}) \dots L_{\underline{b}_p} L_{\underline{a}}^{\delta_p-1} c_p(\underline{x}) \end{bmatrix}$$

eine reguläre Matrix darstellt.

Ein-/Ausgangslinearisierung mit Entkopplung

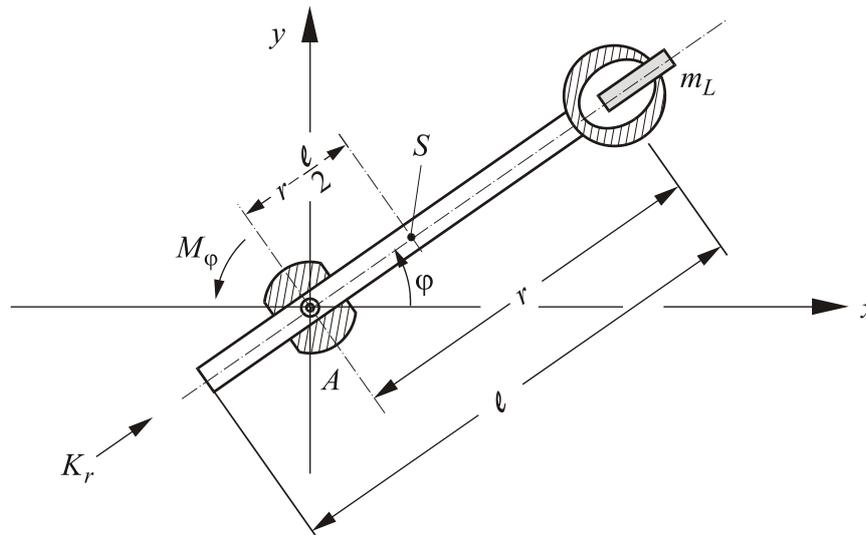


Äquivalenz



Entkoppeltes lineares System

Der Entwurf des nichtlinearen Reglers lässt sich in diesem Fall auch einfacher durchführen. Im Folgenden soll jedoch die in der Vorlesung beschriebene **allgemeine** Methode demonstriert werden.



Es wird nur der grundsätzliche Aufbau betrachtet. Um die vertikale Achse A (senkrecht zur Zeichenebene) kann ein zylindrischer Arm gedreht werden, wozu von außen das Moment M_φ aufgewandt wird. Der Arm (Masse m) greift die Last m_L . Dazu kann er in radialer Richtung durch die äußere Kraft K_r verschoben werden. Die Masse des Armes ist m , sein Schwerpunkt (ohne Last) S . Dass der Arm auch in vertikaler Richtung verschiebbar ist, spielt keine Rolle, da diese Bewegung von der hier betrachteten ebenen Bewegung entkoppelt ist.

Die Zustandsgleichungen dieses Systems lauten:

$$\dot{\underline{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 x_4^2 - \frac{m\ell}{2M} x_4^2 \\ x_4 \\ -\frac{2Mx_1 - m\ell}{k - m\ell x_1 + Mx_1^2} x_2 x_4 \end{bmatrix}}_{\underline{a}(\underline{x})} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{k - m\ell x_1 + Mx_1^2} \end{bmatrix}}_{\underline{B}(\underline{x})} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$$y_1 = x_1 \quad ,$$

$$y_2 = x_3 \quad .$$

Dabei ist

$x_1 = r$: Länge des Roboterarms,

$x_2 = \dot{r}$;

$x_3 = \varphi$: Drehwinkel des Roboterarms,

$x_4 = \dot{\varphi}$;

$u_1 = K_r$, $u_2 = M_\varphi$;

m , ℓ , $M = m + m_L$, $k = \frac{1}{3} m\ell^2$ sind Konstanten.

Reglerentwurf

1. Schritt: Differenzordnung bestimmen:

$$c_1(\underline{x}) = x_1 \quad \searrow \quad \text{grad}^T c_1(\underline{x}) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$$

$$L_{\underline{B}} c_1(\underline{x}) = [0 \quad 0] = \underline{0}^T \quad ,$$

$$L_{\underline{a}} c_1(\underline{x}) = x_2 \quad \searrow \quad \text{grad}^T (L_{\underline{a}} c_1(\underline{x})) = [0 \quad 1 \quad 0 \quad 0]$$

$$L_{\underline{B}} L_{\underline{a}} c_1(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ M & 0 \end{bmatrix} \neq \underline{0}^T \quad \swarrow \delta_1 - 1 = 1 \quad \searrow \delta_1 = 2 \quad ;$$

$$L_{\underline{a}}^2 c_1(\underline{x}) = x_1 x_4^2 - \frac{m\ell}{2M} x_4^2 \quad .$$

$$c_2(\underline{x}) = x_3 \quad \swarrow \text{grad}^T c_2(\underline{x}) = [0 \quad 0 \quad 1 \quad 0]$$

$$L_{\underline{B}} c_2(\underline{x}) = [0 \quad 0] = \underline{0}^T \quad ,$$

$$L_{\underline{a}} c_2(\underline{x}) = x_4 \quad \swarrow \text{grad}^T (L_{\underline{a}} c_2(\underline{x})) = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1] \quad ,$$

$$L_{\underline{B}} L_{\underline{a}} c_2(\underline{x}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{k - m\ell x_1 + Mx_1^2} \end{bmatrix} \neq \underline{0}^T \quad \swarrow \delta_2 - 1 = 1 \quad \searrow \delta_2 = 2 \quad ;$$

$$L_{\underline{a}}^2 c_2(\underline{x}) = -\frac{2Mx_1 - m\ell}{k - m\ell x_1 + Mx_1^2} x_2 x_4 \quad .$$

also: Differenzordnung $\delta = \delta_1 + \delta_2 = 4 = n$: maximale Differenzordnung.

2. Schritt: Entkoppelbarkeitsmatrix:

$$\underline{D}^* = \begin{bmatrix} L_{\underline{B}} L_{\underline{a}} c_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{B}} L_{\underline{a}} c_2(\underline{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{M} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k - m\ell x_1 + Mx_1^2} \end{bmatrix} \quad ,$$

$$\det \underline{D}^* = \frac{1}{M (k - m\ell x_1 + Mx_1^2)} \neq 0 \quad \text{für beliebige } x_1, x_2 \quad ,$$

$$\underline{D}^{*-1} = \begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & k - m\ell x_1 + Mx_1^2 \end{bmatrix} \quad .$$

3. Schritt: Rückführvektor und Vorfiltermatrix (gemäß Vorlesung):

$$\begin{aligned} \underline{r} &= \underline{D}^{*-1} \begin{bmatrix} L_{\underline{a}}^2 c_1(\underline{x}) + q_{10} c_1(\underline{x}) + q_{11} L_{\underline{a}} c_1(\underline{x}) \\ L_{\underline{a}}^2 c_2(\underline{x}) + q_{20} c_2(\underline{x}) + q_{21} L_{\underline{a}} c_2(\underline{x}) \end{bmatrix} \\ &= \underline{D}^{*-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 x_4^2 - \frac{m\ell}{2M} x_4^2 + q_{11} x_2 + q_{10} x_1 \\ -\frac{2Mx_1 - m\ell}{k - m\ell x_1 + Mx_1^2} x_2 x_4 + q_{21} x_4 + q_{20} x_3 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Mx_1 x_4^2 - \frac{1}{2} m\ell x_4^2 + Mq_{11} x_2 + Mq_{10} x_1 \\ -(2Mx_1 - m\ell) x_2 x_4 + (k - m\ell x_1 + Mx_1^2) (q_{21} x_4 + q_{20} x_3) \end{bmatrix}, \\ \underline{V} &= \underline{D}^{*-1} \cdot \underline{Q}_0 = \underline{D}^{*-1} \cdot \begin{bmatrix} q_{10} & 0 \\ 0 & q_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Mq_{10} & 0 \\ 0 & q_{20} (k - m\ell x_1 + Mx_1^2) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4. Schritt: Regler:

$$u_1 = -Mx_1x_4^2 + \frac{1}{2}mlx_4^2 - Mq_{11}x_2 - Mq_{10}x_1 + Mq_{10}w_1 \quad ,$$

$$u_2 = (2Mx_1 - ml)x_2x_4 - (k - mlx_1 + Mx_1^2)(q_{21}x_4 + q_{20}x_3) + q_{20}(k - mlx_1 + Mx_1^2)w_2 \quad .$$

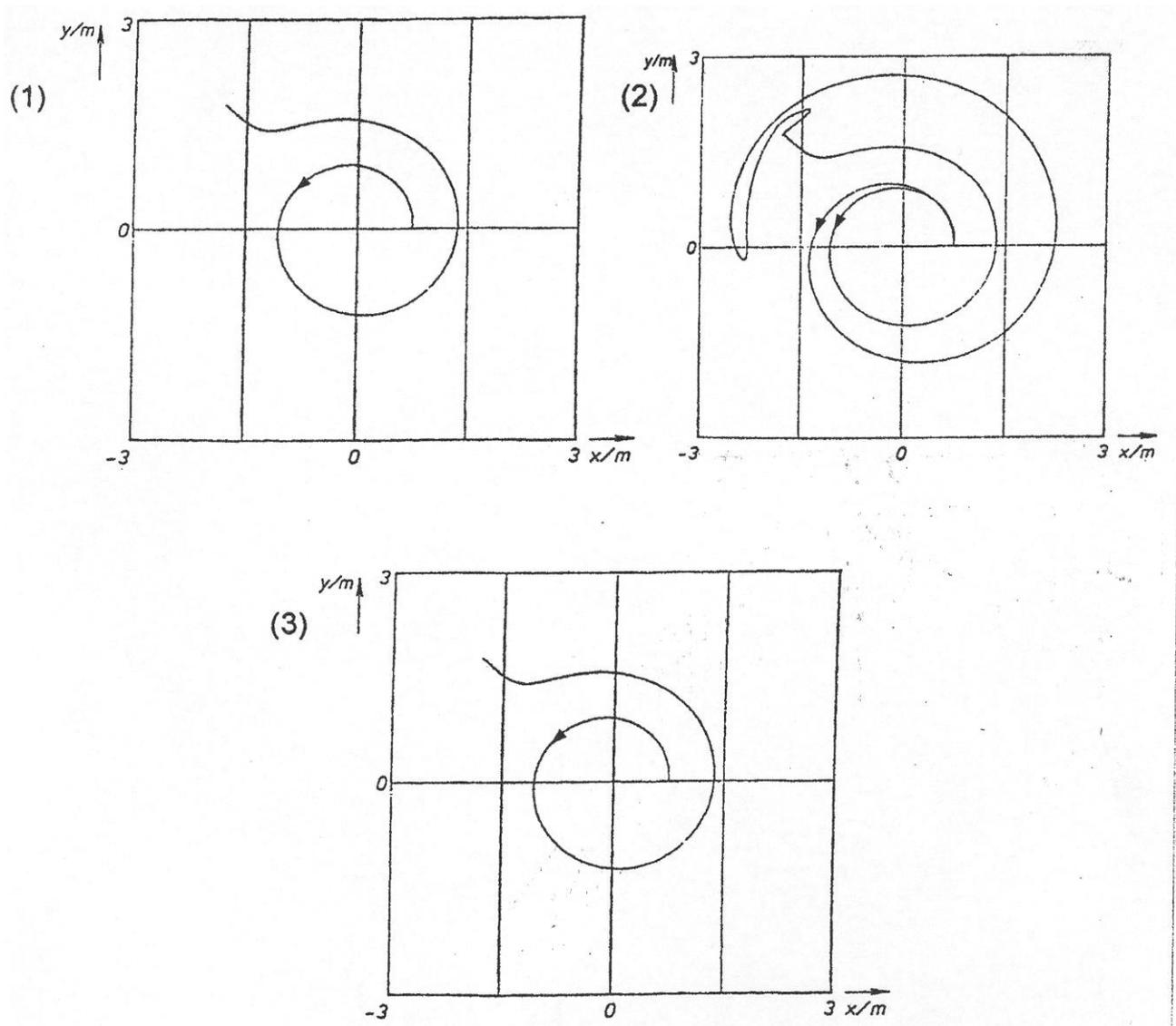
Die mit diesem nichtlinearen Regler erhaltene Regelung ist äquivalent zu den beiden entkoppelten Teilsystemen

$$y_1(s) = \frac{q_{10}}{s^2 + q_{11}s + q_{10}} w_1(s) \quad ,$$

$$y_2(s) = \frac{q_{20}}{s^2 + q_{21}s + q_{20}} w_2(s) \quad .$$

Darin sind die q_{iv} so zu wählen, dass die beiden entkoppelten Teilsysteme vorgegebene Pole haben.

Die Leistungsfähigkeit einer solchen Regelung zeigt das folgende Bild (entnommen aus E. FREUND - H. HOYER: Das Prinzip nichtlinearer Systementkopplung mit der Anwendung auf Industrieroboter. Regelungstechnik 28 (1980), Seite 80-87 und 116-126).



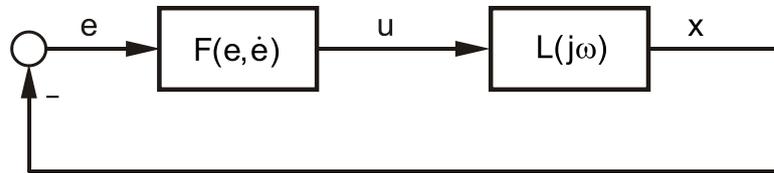
(1) Sollwertkurve in der $x-y$ -Ebene, welcher der Handpunkt des Roboters (Endpunkt des Roboterarmes) nachfolgen soll. Die gesamte Durchlaufzeit soll 17.5 sec betragen, wobei die ersten 4 Quadranten in 5 sec durchlaufen werden sollen.

(2) Lineare Entkopplung mit linearen Reglern.

(3) Nichtlinearer Entwurf, wie oben beschrieben.

Vorzug der nichtlinearen Regelung: Hohe Genauigkeit auch bei schnellen Bewegungen des Roboters.

Ausgangspunkt für das Verfahren der Harmonischen Balance ist der **nichtlineare Standard-Regelkreis** (vgl. NLR 1-13):



Voraussetzungen:

- **Lineares Teilsystem**

L1) $L(s) = R(s)e^{-T_t s}$

mit $R(s) = \frac{Z(s)}{N(s)}$ rational, $T_t > 0$, $L(0) > 0$.

L2) Die Pole von $R(s)$ liegen bis auf maximal einen Pol in $s = 0$ links der j -Achse.

L3) $L(j\omega)$ hat hinreichend starken Tiefpass-Charakter, d.h. bei wachsendem ω soll $|L(j\omega)|$ stark fallen (ist z.B. immer dann erfüllt, wenn $\text{Grad } Z(s) \leq \text{Grad } N(s) - 2$).

L4) Bei Annahme einer Dauerschwingung im Regelkreis (Amplitude A_p , Periodendauer $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p}$) ist zusätzlich erforderlich: ω_p muss im Bereich der Knickfrequenzen von $L(j\omega)$ liegen (lässt sich nicht a-priori überprüfen!)

- **Nichtlineares Teilsystem**

N1) $F(e, \dot{e})$ ist symmetrisch zum Ursprung, d.h. $F(e, \dot{e}) = -F(-e, -\dot{e})$ (bei eindeutigen Kennlinien bedeutet dies, dass $F(e)$ eine ungerade Funktion ist).

N2) Die Kennlinie soll monotonen Verlauf zeigen.

5.2 Beschreibungsfunktionen einiger Nichtlinearitäten NLR 5-2

Die Beschreibungsfunktion $N(A)$ eines nichtlinearen Gliedes, dessen Eingangsgröße e mit der Ausgangsgröße u durch die Beziehung

$$u = F(e, \dot{e})$$

verknüpft ist, kann aus den Gleichungen

$$N(A) = R(A) + jI(A) \quad ,$$

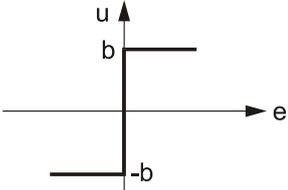
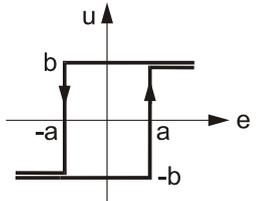
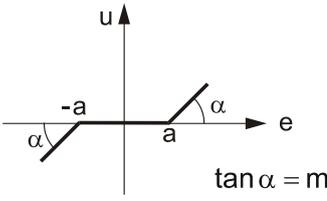
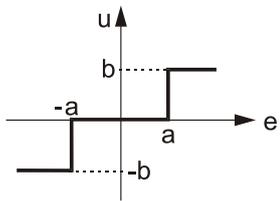
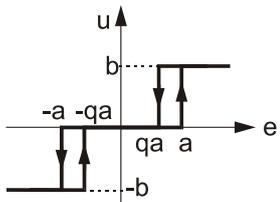
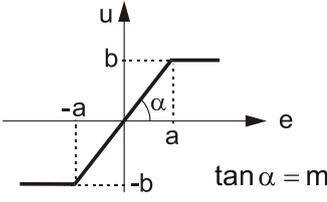
$$R(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin v, A\omega \cos v) \sin v \, dv \quad ,$$

$$I(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} F(A \sin v, A\omega \cos v) \cos v \, dv$$

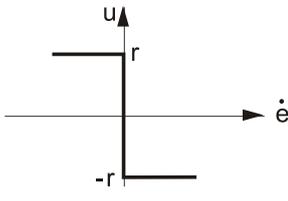
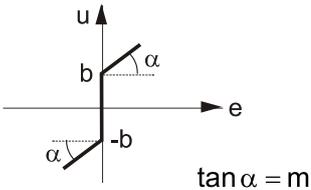
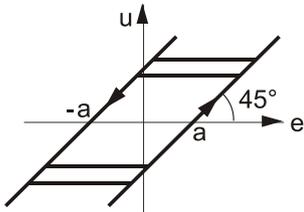
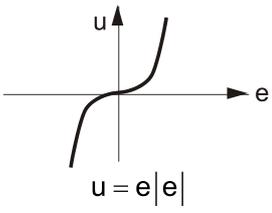
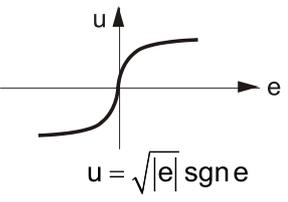
berechnet werden.

Im Folgenden werden die Beschreibungsfunktionen $N(A)$ einiger nichtlinearer Kennlinienglieder angegeben.

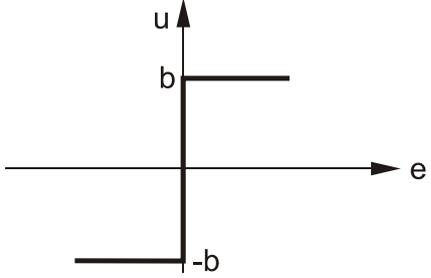
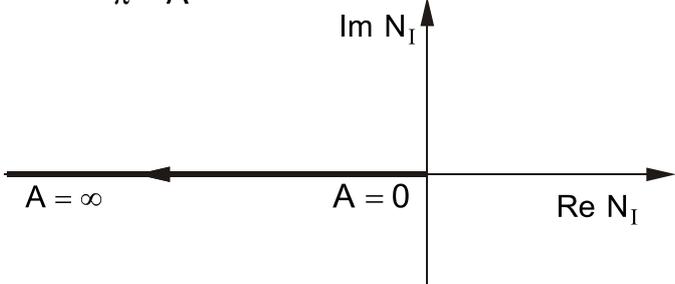
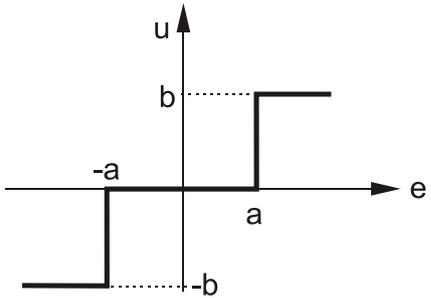
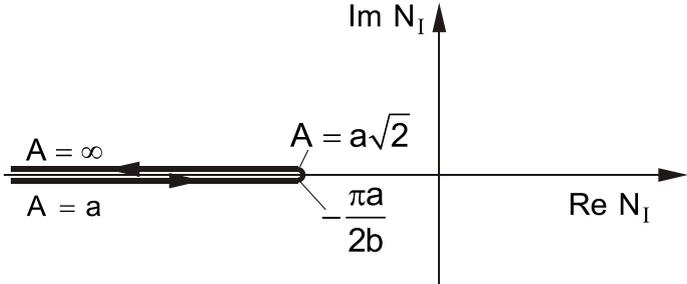
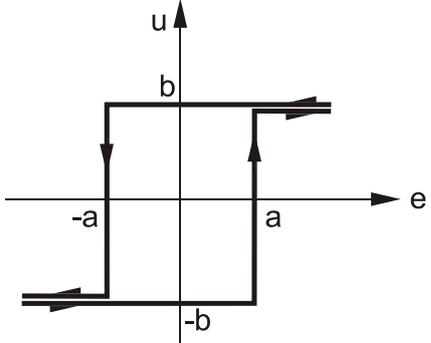
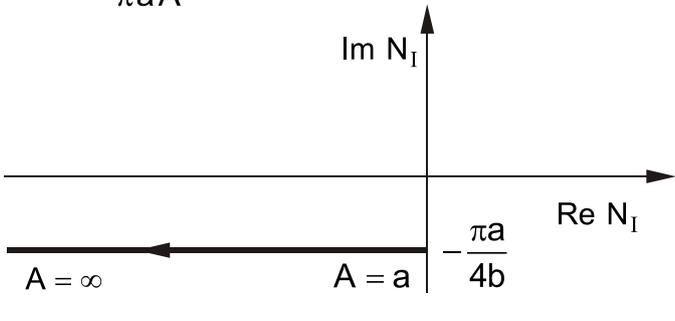
5.2 Beschreibungsfunktionen einiger Nichtlinearitäten NLR 5-3

Benennung der Nichtlinearität	Bild bzw. Gleichung Dabei: $e = A \sin \omega t$	Beschreibungsfunktion $N(A)$
Zweipunktglied		$\frac{4b}{\pi A}$, $A > 0$
Zweipunktglied mit Hysterese		$\frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - j \frac{4ab}{\pi A^2}$, $A \geq a$
Totzone		$m \left[1 - \frac{2}{\pi} \text{Arcsin} \frac{a}{A} - \frac{2}{\pi} \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$, $A \geq a$ (*)
Dreipunktglied		$\frac{4b}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}$, $A \geq a$
Dreipunktglied mit Hysterese		$\frac{2b}{\pi A} \left[\sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \sqrt{1 - \left(\frac{qa}{A}\right)^2} \right] - j \frac{2ab(1-q)}{\pi A^2}$, $A \geq a$
Begrenzung		m , $0 \leq A \leq a$ $\frac{2m}{\pi} \left[\text{Arcsin} \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right]$, $A \geq a$ (*)

5.2 Beschreibungsfunktionen einiger Nichtlinearitäten NLR 5-4

Benennung der Nichtlinearität	Bild bzw. Gleichung Dabei: $e = A \sin \omega t$	Beschreibungsfunktion $N(A)$
Trockene Reibung		$-j \frac{4r}{\pi A}, A > 0$
		$\frac{4b}{\pi A} + m, A > 0$
Lose (Spiel)		$\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \left[\text{Arc sin } \alpha + \alpha \sqrt{1 - \alpha^2} \right] - j \frac{1}{\pi} (1 - \alpha^2)$ $-1 < \alpha < 1, \alpha = 1 - \frac{2a}{A}$ (*)
	$u = e^3$	$\frac{3}{4} A^2$
		$\frac{8A}{3\pi}$
		$\frac{4\sqrt{2}}{\pi} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \right]^2}{\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)} \frac{1}{\sqrt{A}}, A > 0$

(*) $\text{Arc sin } \frac{a}{A}$: Hauptwert des $\text{arc sin } \frac{a}{A}$ mit $0 \leq \text{arc sin } \frac{a}{A} \leq \frac{\pi}{2}$

Kennlinie	Beschreibungsfunktion $N(A)$ und Ortskurve der inversen Beschreibungsfunktion $N_I(A)$ in der z -Ebene
<p>1) Zweipunktglied</p> 	$N(A) = \frac{4b}{\pi} \cdot \frac{1}{A}, \quad A > 0$ 
<p>2) Dreipunktglied</p> 	$N(A) = \frac{4b}{\pi a} \cdot \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2}, \quad A \geq a$ 
<p>3) Zweipunktglied mit Hysterese</p> 	$N(A) = \frac{4b}{\pi a} \cdot \left[\frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} - j \left(\frac{a}{A}\right)^2 \right], \quad A \geq a$ $= \frac{4b a}{\pi a A} \cdot e^{-j \text{Arc sin} \left(\frac{a}{A}\right)} \quad (*)$ 

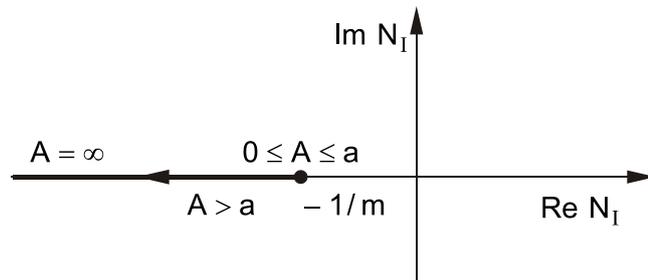
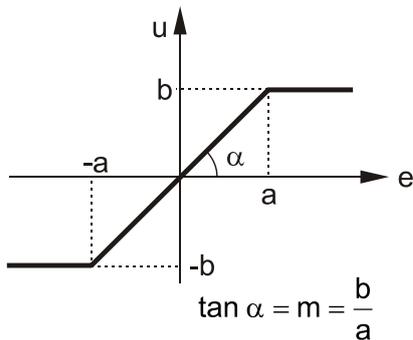
(*) $\text{Arc sin} \frac{a}{A}$: Hauptwert des $\text{arc sin} \frac{a}{A}$ mit $0 \leq \text{arc sin} \frac{a}{A} \leq \frac{\pi}{2}$

Kennlinie

Beschreibungsfunktion $N(A)$ und Ortskurve der inversen Beschreibungsfunktion $N_I(A)$ in der z -Ebene.

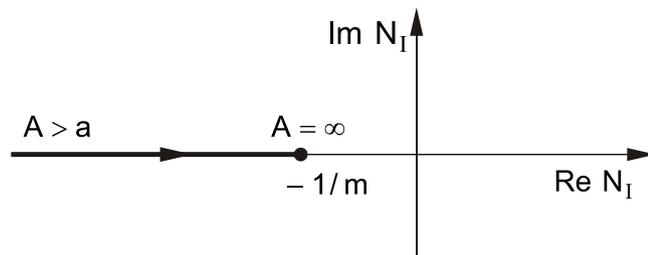
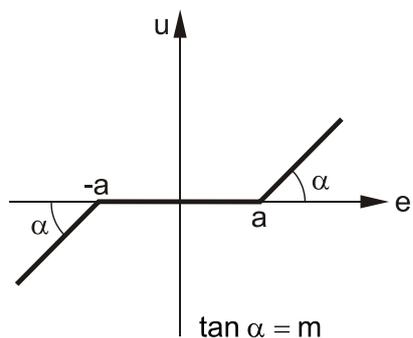
4) Begrenzung

$$N(A) = \begin{cases} m, & 0 \leq A \leq a \\ \frac{2m}{\pi} \left[\text{Arc sin } \frac{a}{A} + \frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} \right], & A \geq a \end{cases} \quad (*)$$



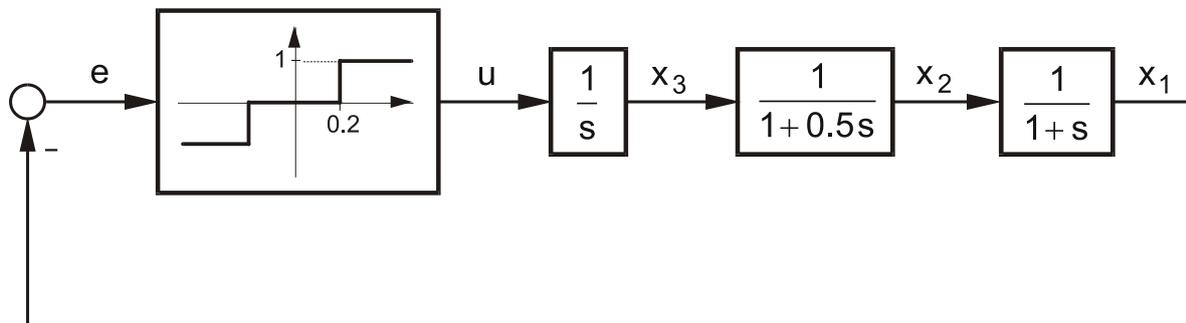
5) Totzone

$$N(A) = m - \frac{2m}{\pi} \left[\frac{a}{A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} + \text{Arc sin } \frac{a}{A} \right], \quad A \geq a \quad (*)$$



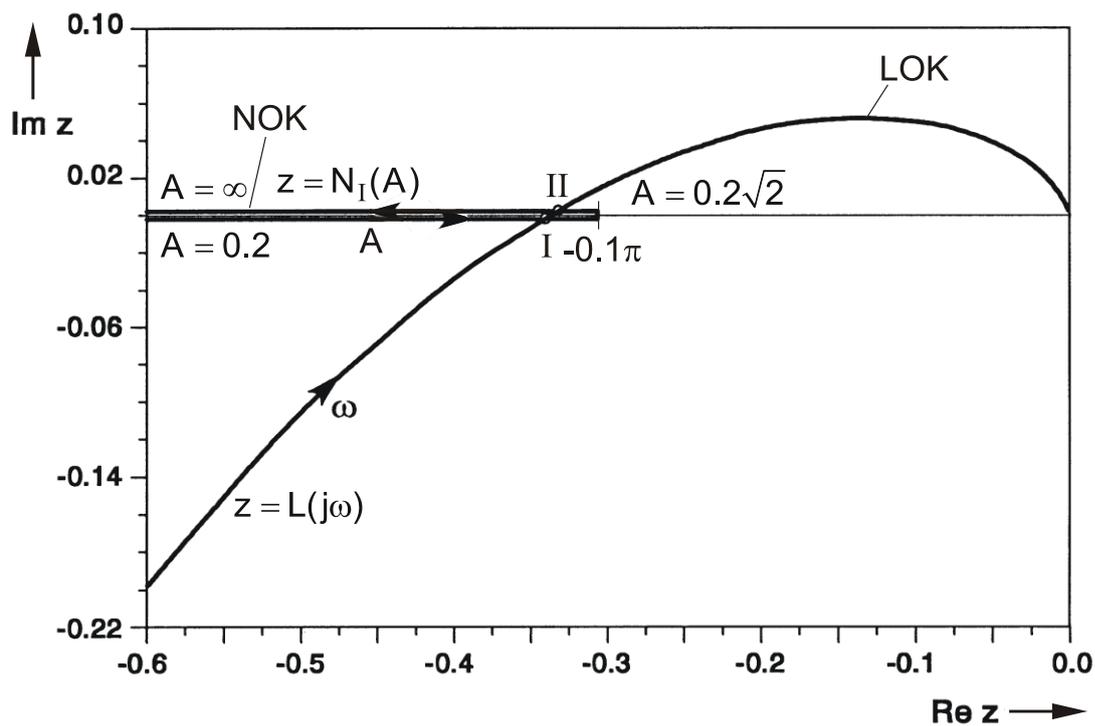
(*) $\text{Arc sin } \frac{a}{A}$: Hauptwert des $\text{arc sin } \frac{a}{A}$ mit $0 \leq \text{arc sin } \frac{a}{A} \leq \frac{\pi}{2}$

Regelkreis mit Dreipunktglied



Lösung der Gleichung der Harmonischen Balance:

- Zwei-Ortskurven-Verfahren:



also: zwei Schnittpunkte I und II , die zu zwei Dauerschwingungen
 ($\omega_I = \omega_{II} = \omega_p$, $A_I < 0.2\sqrt{2} < A_{II}$) gehören.

- Rechnerische Lösung:

$$L(j\omega) = \frac{1}{j\omega(1+0.5j\omega)(1+j\omega)}$$

$$\frac{1}{L(j\omega)} = j\omega(1-0.5\omega^2 + j1.5\omega)$$

$$= -1.5\omega^2 + j\omega(1-0.5\omega^2) .$$

Da eine eindeutige Kennlinie vorliegt, ergibt sich die Frequenz ω_p der Dauerschwingungen aus

$$\text{Im} \frac{1}{L(j\omega_p)} = 0$$

$$\omega_p(1-0.5\omega_p^2) = 0 , \text{ d.h. } \omega_p = +\sqrt{2} \quad (\omega_p = 0 : \text{triviale Lösung}).$$

Die Amplituden A_I und A_{II} berechnen sich dann aus der reellen Gleichung

$$N(A_p) = -\frac{1}{L(j\omega_p)} ,$$

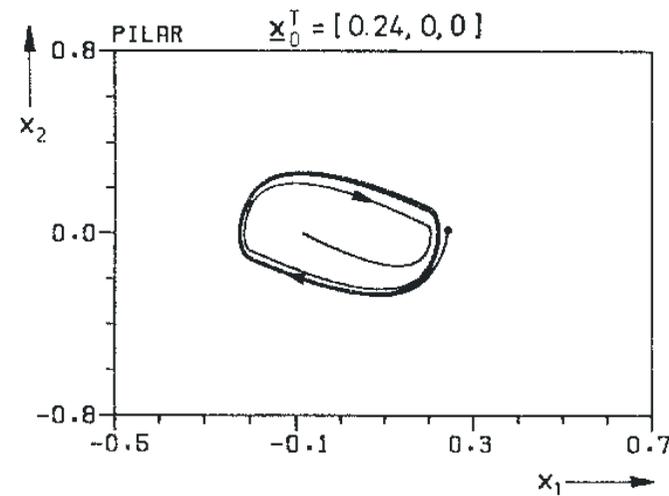
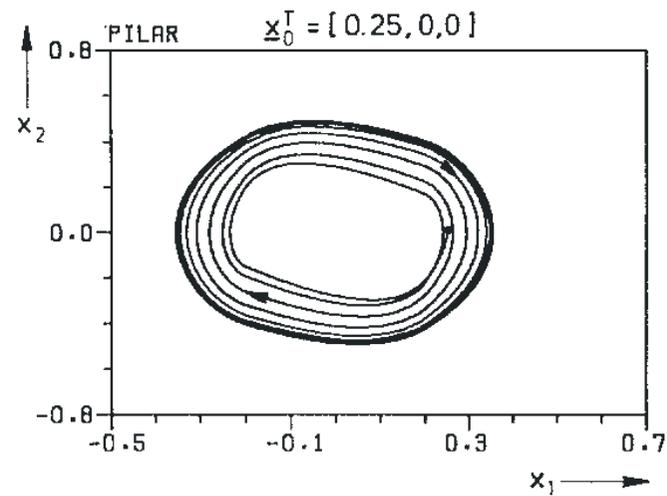
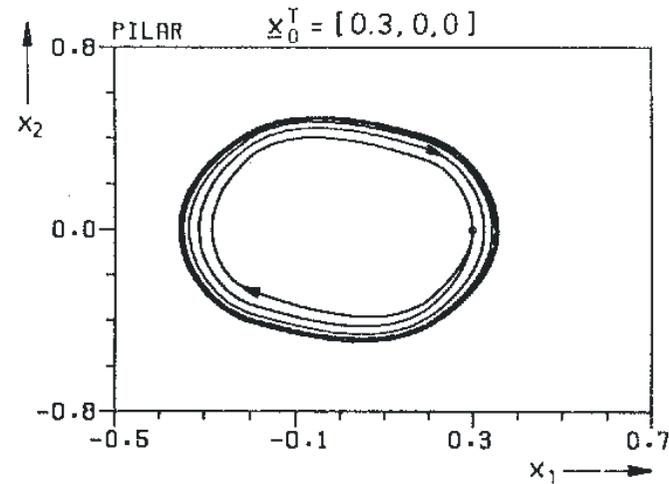
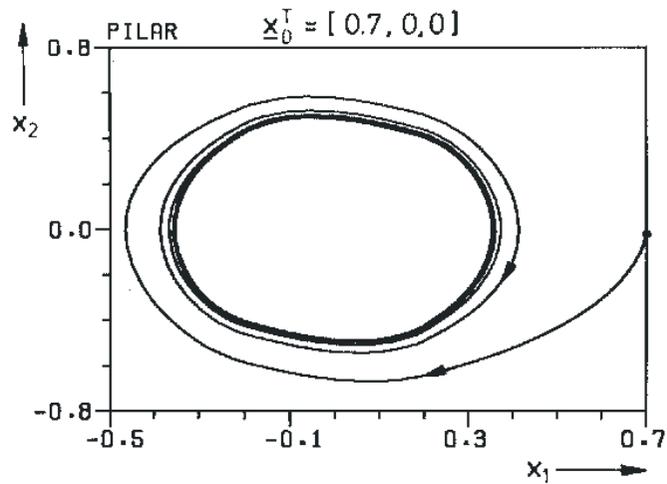
also

$$\frac{4}{\pi A_p} \sqrt{1 - \left(\frac{0.2}{A_p}\right)^2} = 3 .$$

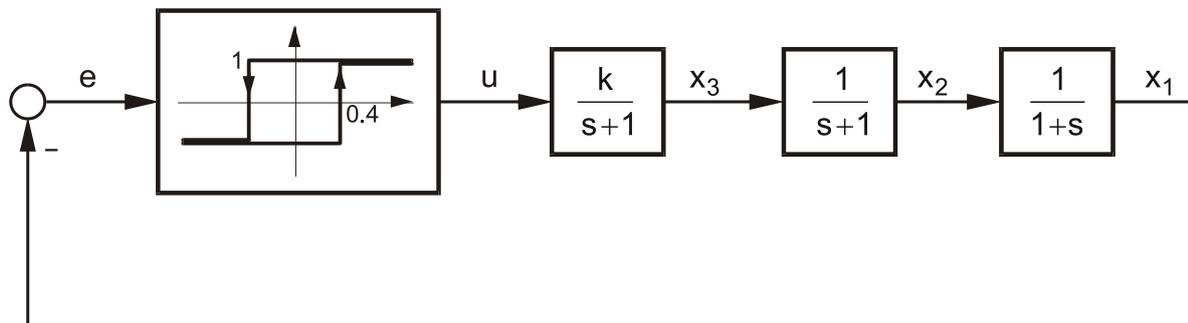
Diese quadratische Gleichung für A_p hat dann die gewünschten Lösungen

$$A_I = 0.243 \quad (< 0.2\sqrt{2}) ,$$

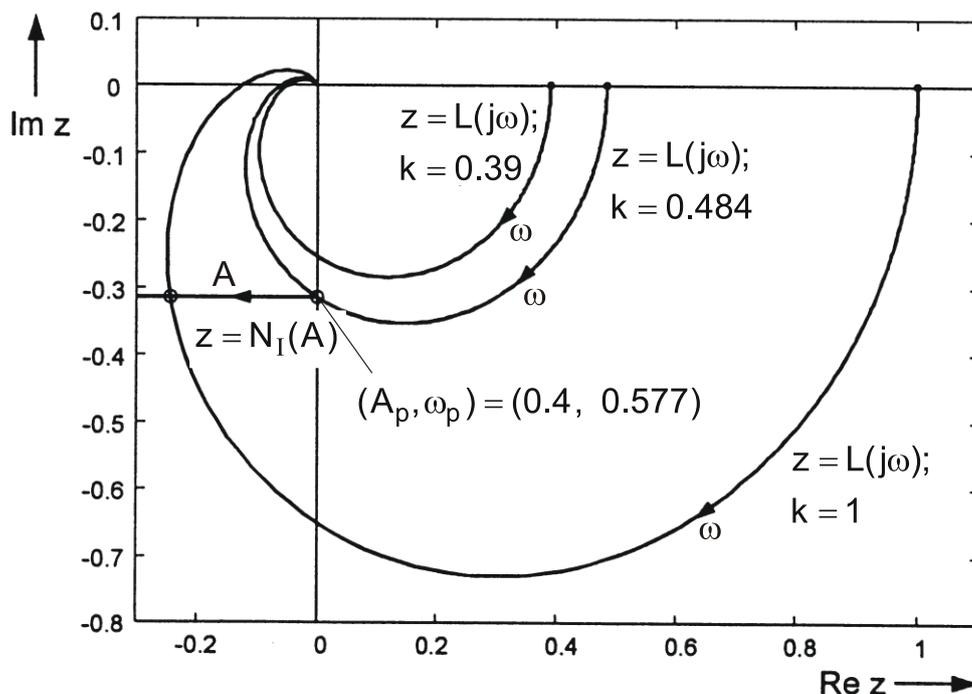
$$A_{II} = 0.356 \quad (> 0.2\sqrt{2}) .$$

Exemplarische Trajektorienverläufe in der (x_1, x_2) -Ebene

Regelkreis mit Zweipunktglied mit Hysterese

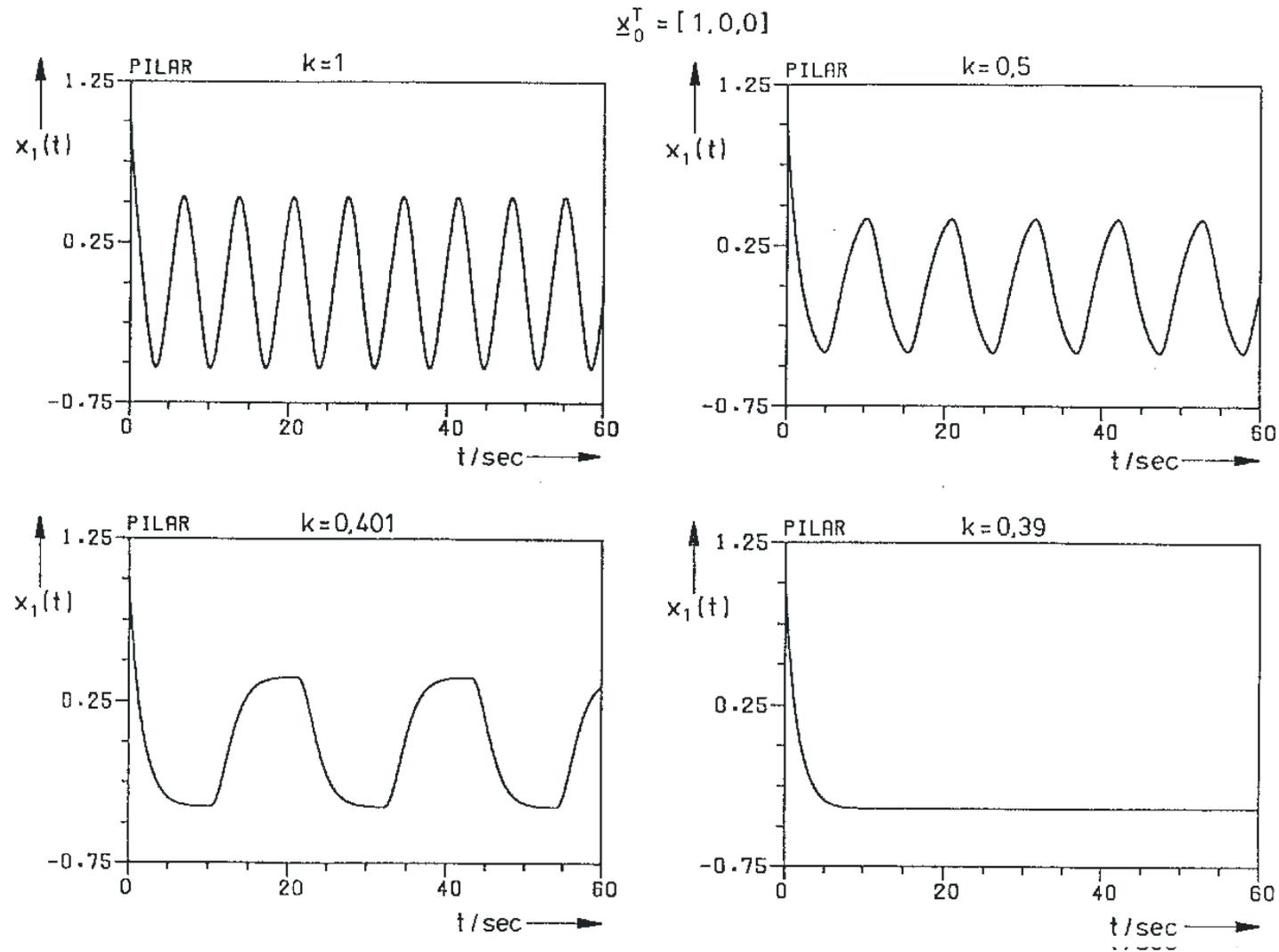


Zwei-Ortskurven-Verfahren:



Wie man an den Verläufen von $x_1(t)$ auf der folgende Seite erkennen kann, liefert in diesem Fall die Harmonische Balance ein falsches Ergebnis, da offensichtlich bereits ab der Verstärkung $k = 0.4$ eine Dauerschwingung vorliegt.

Der Grund hierfür ist darin zu sehen, dass die zusätzliche Annahme L4) (s. NLR 5-1) der Harmonischen Balance verletzt ist, da $\omega_p = 0.577 < \omega_k = 1$ (Knickfrequenz von $L(j\omega)$) ist.

Verläufe von $x_1(t)$ 

Gegeben sei die Zwei-Ortskurven-Darstellung eines nichtlinearen Standardregelkreises. Für das Stabilitätsverhalten der durch die Schnittpunkte von linearer Ortskurve (LOK) und nichtlinearer Ortskurve (NOK) gekennzeichneten Grenzschwingungen gelten folgende

Stabilitätskriterien für Grenzschwingungen:

Eine Grenzschwingung (GS) mit der Amplitude A_p ist eine

- **asymptotisch stabile GS**, wenn der laufende Punkt der NOK für $A < A_p$ von der LOK umschlossen und für $A > A_p$ nicht umschlossen wird,
- **instabile GS**, wenn der laufende Punkt der NOK für $A > A_p$ von der LOK umschlossen und für $A < A_p$ nicht umschlossen wird,
- **semistabile GS**, wenn der laufende Punkt der NOK sowohl für $A < A_p$ als auch für $A > A_p$ von der LOK umschlossen oder nicht umschlossen wird.

Bei „einfacher“ Gestalt der Ortskurven lassen sich die Kriterien etwas plakativer formulieren:

Eine Grenzschwingung (GS) mit der Amplitude A_p ist eine

- **asymptotisch stabile GS**, wenn die LOK durch die NOK von rechts nach links durchstoßen wird,
- **instabile GS**, wenn die LOK durch die NOK von links nach rechts durchstoßen wird,
- **semistabile GS**, wenn die NOK in der Umgebung des gemeinsamen Punktes auf der gleichen Seite der LOK liegt.

Gegeben sei der nichtlineare Standard-Regelkreis gemäß Bild 1.

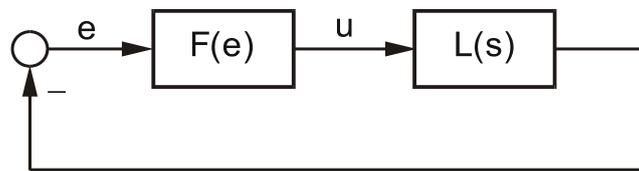


Bild 1

Die nichtlineare Kennlinie $F(e)$ sei eindeutig, stückweise stetig, $F(0)=0$ und liege in einem Sektor gemäß Bild 2.

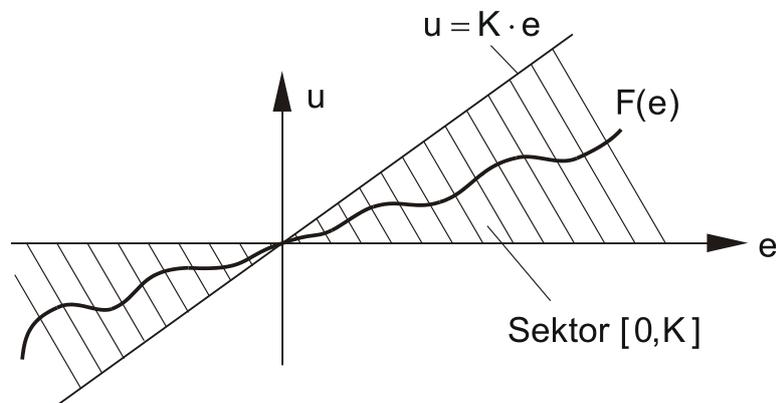


Bild 2

Dann gilt für $F(e)$ die Sektorbedingung:

$$\left. \begin{array}{l} 0 \leq F(e) \leq Ke, \quad e > 0 \\ Ke \leq F(e) \leq 0, \quad e < 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{F(e)}{e} \leq K \quad (e \neq 0)$$

Absolute Stabilität

Der Regelkreis heißt **absolut stabil** im Sektor $[0, K]$, wenn die Ruhelage global asymptotisch stabil ist für jede eindeutige, stückweise stetige Kennlinie $F(e)$ mit $F(0)=0$ aus $[0, K]$.

Popov-Kriterium

Unter den Voraussetzungen

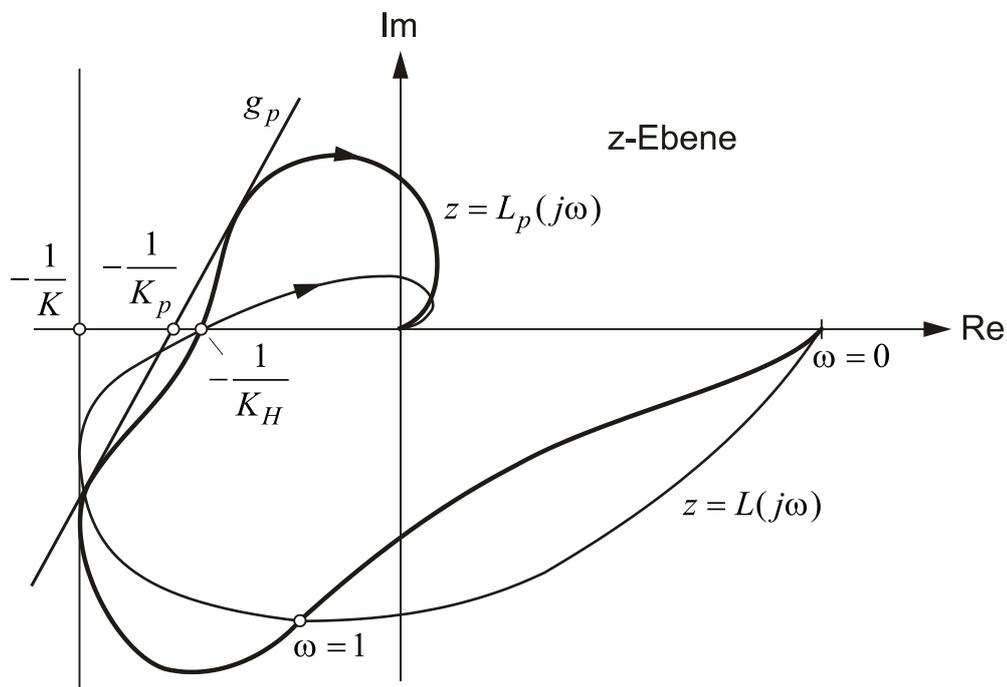
- $F(e)$ ist eindeutig, stückweise stetig, $F(0) = 0$,
- $F(e)$ erfüllt die Sektorbedingung $0 \leq \frac{F(e)}{e} \leq K$, $e \neq 0$,
- $L(s) = \frac{1}{s^p} \frac{1 + b_1 s + \dots}{1 + a_1 s + \dots}$ ist rational, $p = 0, 1, 2, \dots$, $ZG < NG$,
- die Pole von $L(s)$ liegen links oder allenfalls auf (singulärer Fall) der j-Achse,
- der Regelkreis ist im singulären Fall *grenzstabil*, d.h. er ist dann im Sektor $[\varepsilon, K]$ ($\varepsilon > 0$, beliebig klein) global asymptotisch stabil,

ist der Regelkreis **absolut stabil** im Sektor $[0, K]$ bzw. $[\varepsilon, K]$, $0 < K < +\infty$, wenn sich eine reelle Zahl q finden lässt, für die

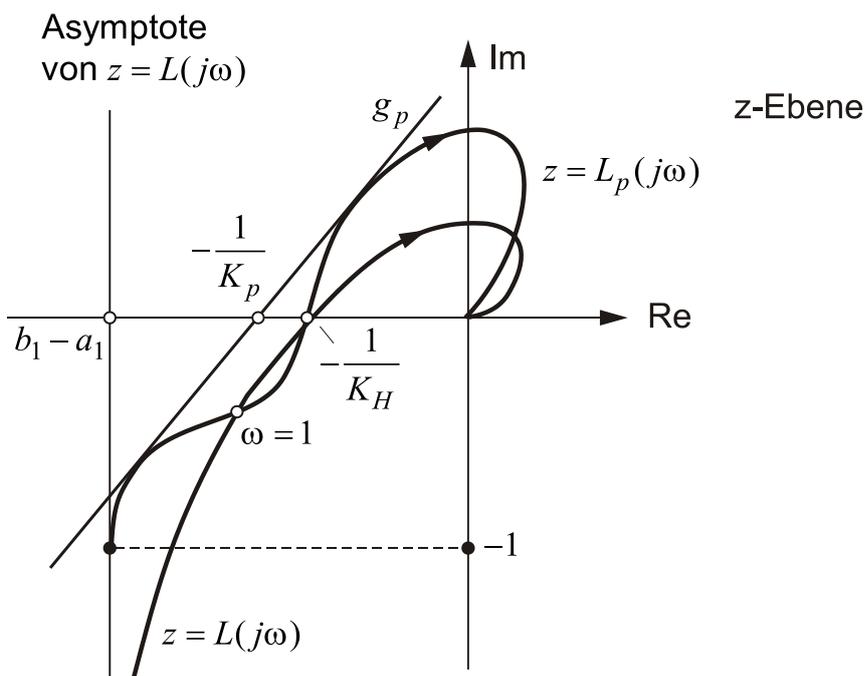
$$\operatorname{Re}[(1 + qj\omega)L(j\omega)] > -\frac{1}{K}$$

für alle $\omega \geq 0$ gilt.

1. Lineares Teilsystem $L(j\omega)$ 4. Ordnung mit P-Verhalten (Hauptfall)



2. Lineares Teilsystem $L(j\omega)$ 4. Ordnung mit I-Verhalten (singulärer Fall)



Gegeben sei der Regelkreis nach Bild 1:

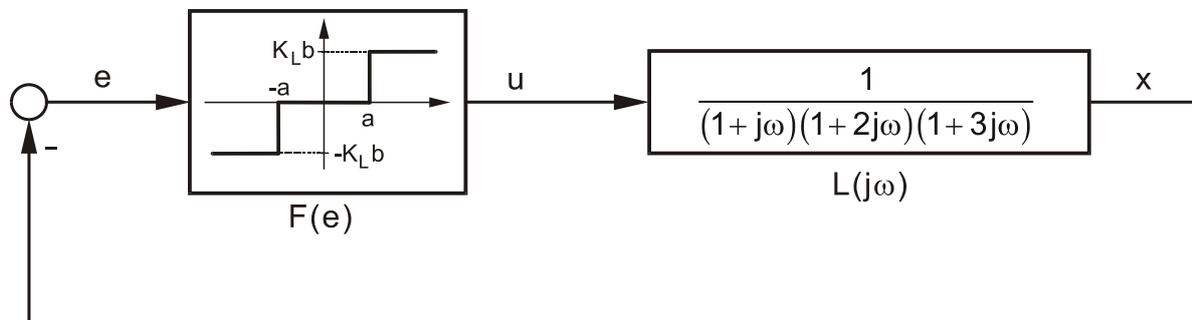


Bild 1

Die Nichtlinearität ist eine Dreipunktcharakteristik, zu welcher die Verstärkung K_L des linearen Teilsystems bereits hinzugefügt ist. Bild 2 zeigt die Popov-Ortskurve $z = L_p(j\omega)$:

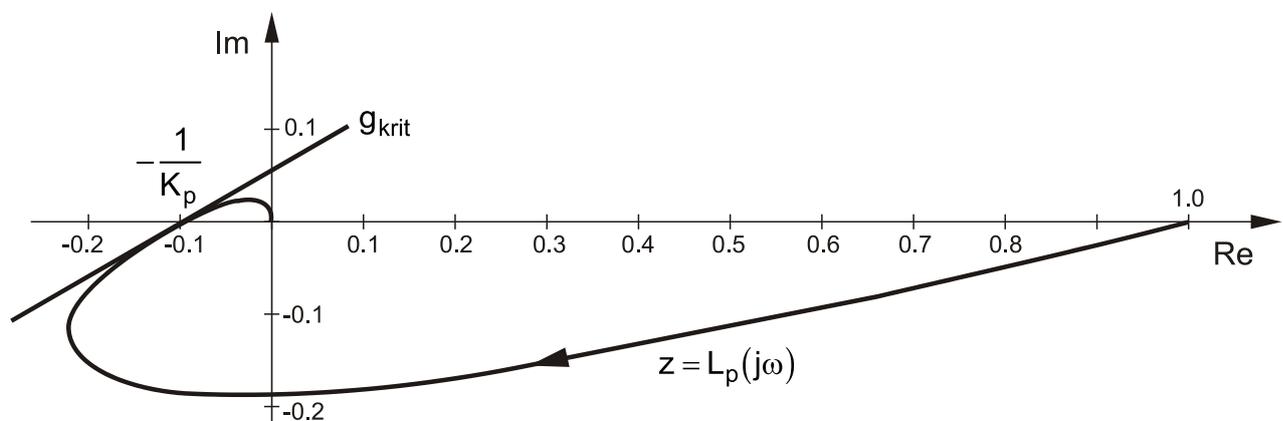


Bild 2

Man sieht sofort, dass die Gerade g_{krit} durch die Tangente an die Popov-Ortskurve im Schnittpunkt mit der reellen Achse gegeben ist. Dieser Schnittpunkt hat nach Bild 2 die Abszisse -0.1 . Demgemäß ist

$$-\frac{1}{K_p} = -0.1 \quad \leadsto \quad K_p = 10 \quad .$$

Dadurch wird der Popov-Sektor im Bild 3 festgelegt:

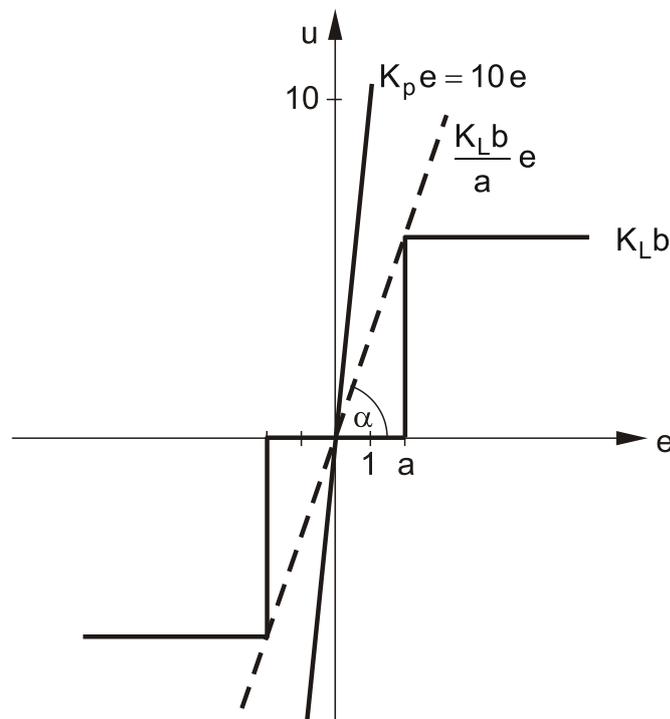


Bild 3

Damit die Dreipunktkenlinie aus Bild 1 in ihm liegt, muss

$$\tan \alpha = \frac{K_L b}{a}$$

kleiner als die Steigung K_p der oberen Grenze des Popov-Sektors sein:

$$\frac{K_L b}{a} < 10 \quad .$$

Ist diese Ungleichung für die gegebenen Werte von K_L , b und a erfüllt, so ist die Ruhelage $(x_R, u_R) = (0, 0)$ des nichtlinearen Regelkreises im Bild 1 global asymptotisch stabil.

Man sieht an diesem Beispiel, wie einfach die Anwendung des Popov-Kriteriums ist. Jedoch ist es kein Allheilmittel, da es nur eine hinreichende Bedingung bereitstellt. Für das betrachtete Beispiel bedeutet dies, dass die Ruhelage durchaus auch noch global asymptotisch stabil sein kann, wenn die Dreipunktkennlinie mit ihrer oberen und unteren Ecke aus dem Popov-Sektor herausragt. Um dies deutlich zu machen, wird im Folgenden das Verfahren der Harmonischen Balance auf das System aus Bild 1 angewendet.

Anwendung der Harmonischen Balance:

Als Bedingung für globale asymptotische Stabilität auf Grund der Harmonischen Balance darf keine Dauerschwingung auftreten.

Lineares Teilsystem:

$$L(j\omega) = \frac{1}{N(j\omega)} = \frac{1}{1 - (2+3+6)\omega^2 + j\omega \left[(1+2+3) - 1 \cdot 2 \cdot 3\omega^2 \right]}$$

$$= \frac{1}{1 - 11\omega^2 + j\omega 6(1 - \omega^2)} .$$

Der Schnittpunkt mit der reellen Achse ergibt sich aus

$$1 - \omega^2 = 0 \quad \swarrow \quad \omega_s^2 = 1 .$$

Damit ist

$$\operatorname{Re} L(j\omega_s) = \frac{1}{\operatorname{Re} N(j\omega_s)} = \frac{1}{1-11} = -\frac{1}{10} .$$

Stabilitätsbedingung:

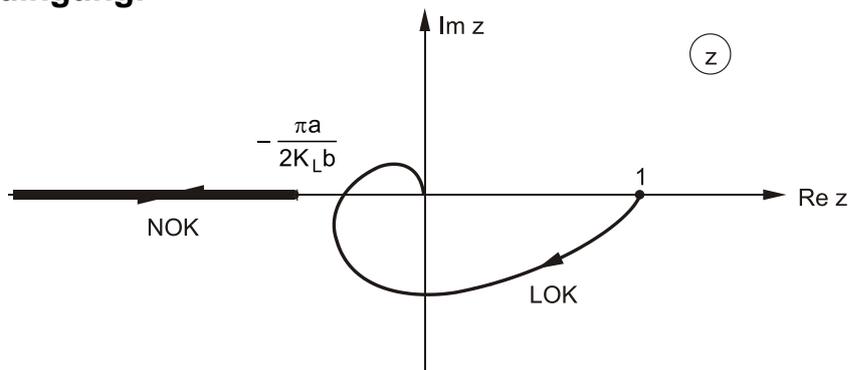


Bild 4

Anhand von Bild 4 liest man ab:

$$\operatorname{Re} L(j\omega_s) > -\frac{\pi a}{2K_L b} \quad \swarrow \quad -\frac{1}{10} > -\frac{\pi a}{2K_L b} \quad \swarrow \quad \frac{K_L b}{a} < 5\pi \approx 15.71 \quad .$$

Wie man sieht, liefert die Anwendung der Harmonischen Balance einen größeren Bereich für $\frac{K_L b}{a}$, für den der Regelkreis global asymptotisch stabil ist (hierbei ist jedoch zu beachten, dass das Verfahren der Harmonischen Balance nur ein Näherungsverfahren ist).

Zu Simulationszwecken wird von der Frequenzbereichsdarstellung

$$X(s) = \frac{1}{(1+s)(1+2s)(1+3s)} U(s)$$

des linearen Teilsystems in den Zeitbereich übergegangen, womit man zur Zustandsgleichung

$$6\ddot{x} + 11\dot{x} + 6x = u$$

gelangt.

Durch Einführung der Zustandsvariablen

$$x_1 = x \quad , \quad x_2 = \dot{x} \quad \text{und} \quad x_3 = \ddot{x}$$

erhält man das lineare Teilsystem $L(s)$ in der Regelungsnormalform

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \quad , \\ \dot{x}_2 &= x_3 \quad , \\ \dot{x}_3 &= -\frac{1}{6}x_1 - x_2 - \frac{11}{6}x_3 + \frac{1}{6}u \quad . \end{aligned}$$

Für die Werte $a=1$, $K_L b=12$, also $\frac{K_L b}{a}=12 > 10$ und die beiden Anfangswerte

$$\underline{x}_{01} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{x}_{02} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

sind im Bild 5 die Trajektorien des nichtlinearen Systems gemäß Bild 1 dargestellt. Genauer gesagt, handelt es sich dabei um Projektionen der Trajektorien in die (x_1, x_2) - , (x_2, x_3) - und (x_1, x_3) -Ebene.

Bild 6 zeigt den Verlauf von $x(t)$ für die Anfangsbedingung $\underline{x}_0^T = (-3, 3, 1)$ und $a=1$, $K_L b=12$ und 15 (asymptotisches stabiles Verhalten) sowie $K_L b=16$ (instabiles Verhalten).

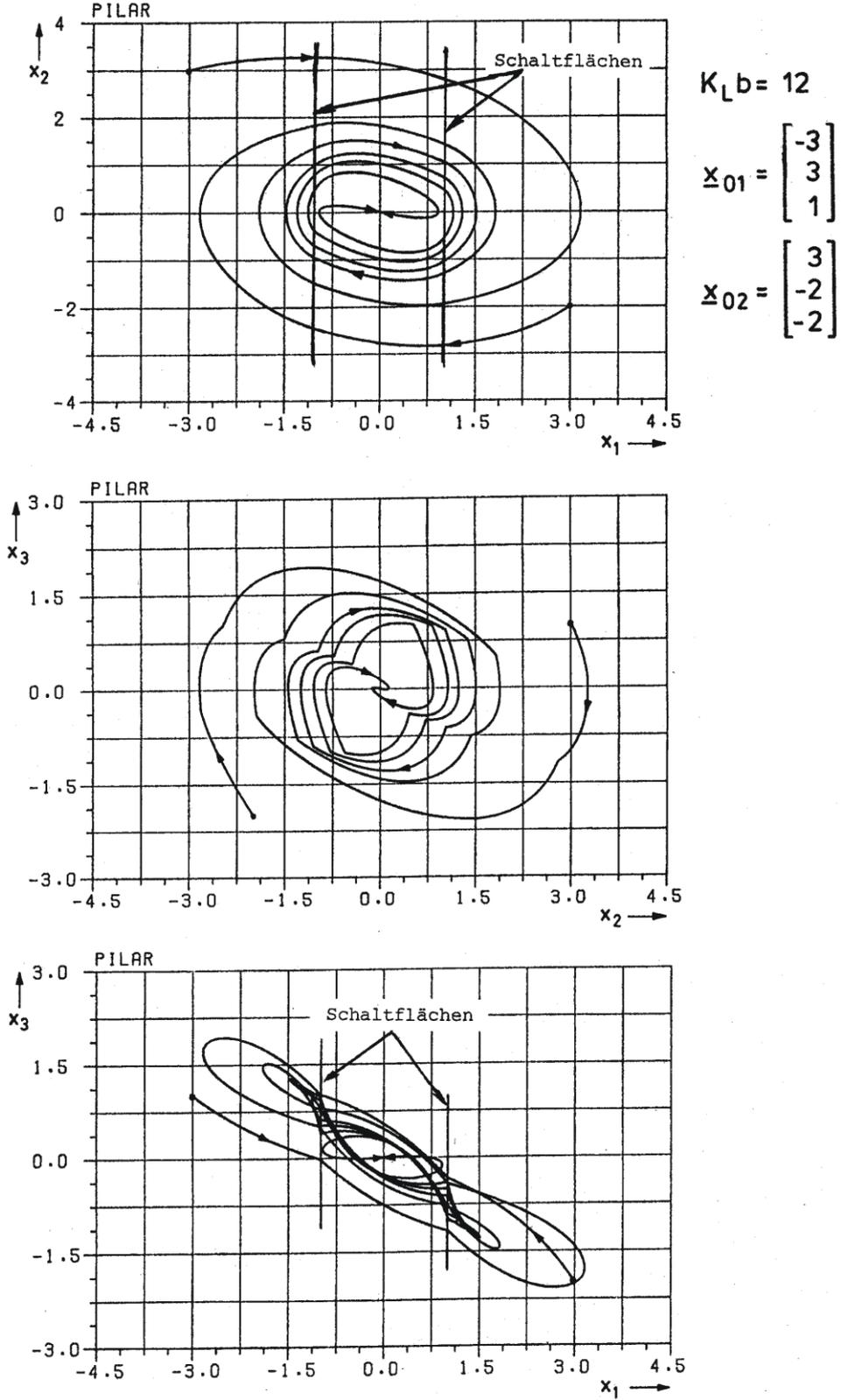


Bild 5

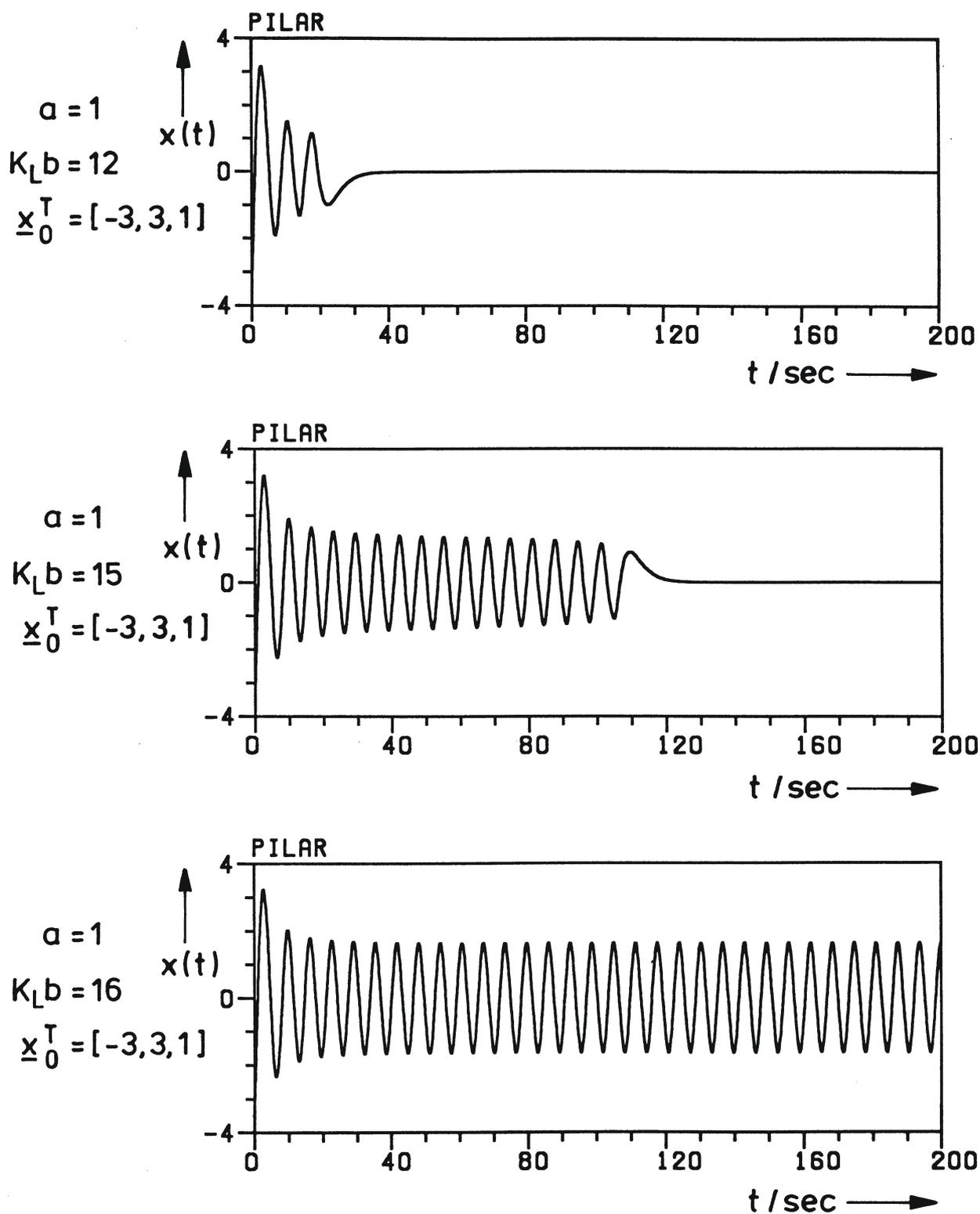


Bild 6